गणित

प्रश्न प्रदर्शिका

कक्षा 12

Open Knowledge Foundation Network, India : Open Education Project

Help spreading the light of education. Use and share our books. It is FREE. Educate a child. Educate the economically challenged.

Share and spread the word! Show your support for the cause of Openness of Knowledge.

facebook: https://www.facebook.com/OKFN.India

twitter: https://twitter.com/OKFNIndia

Website: http://in.okfn.org/

गणित
प्रश्न प्रदर्शिका

कक्षा 12

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
मार्च 2010 चैत्र 1932

PD 2T ML

रु. 125.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा डी. के. प्रिंटर्स, 5/16, मोती नगर इंडस्ट्रियल एरिया दिल्ली-110015 से मुद्रित।

ISBN 978-93-5007-040-6

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 — **फोन :** 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III स्टेज
बेंगलुरु 560 085 — **फोन :** 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 — **फोन :** 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप
पनिहटी
कोलकाता 700 114 — **फोन :** 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781021 — **फोन :** 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन विभाग	:	*नीरजा शुक्ला*
मुख्य उत्पादन अधिकारी	:	*शिव कुमार*
मुख्य संपादक	:	*श्वेता उप्पल*
मुख्य व्यापार प्रबंधक	:	*गौतम गांगुली*
सहायक संपादक	:	*एम. लाल*
उत्पादन सहायक	:	*राजेश पिप्पल*

आवरण
श्वेता राव

प्राक्कथन

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.) – 2005 ने स्कूली शिक्षा के सभी स्तरों के लिए पाठ्यक्रमों और पाठ्यपुस्तकों के विकास के लिए एक नये पहलू का सूत्रपात किया। इस पहलू में विद्यार्थियों द्वारा रटकर सीखने को निरोत्साहित करने और उनमें समझ को बढ़ाने के लिए विवेकपूर्ण प्रयास किए गए हैं। यह उस राष्ट्रीय शिक्षा नीति-1986 और भार रहित शिक्षा प्राप्ति-1993 से भलीभाँति मेल खाता है जोकि विद्यार्थी केंद्रित शिक्षा प्रणाली की अनुशंसा करता है। कक्षा 11 की पाठ्यपुस्तकें दिसम्बर, 2005 में और कक्षा 12 के लिए दिसम्बर 2006 में प्रकाशित हुईं। सभी स्तरों पर इन पुस्तकों को विद्यार्थियों एवं शिक्षकों द्वारा हृदय से स्वीकार किया गया।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.)–2005 उल्लेख करती है कि निर्धारित पाठ्यपुस्तकों को परीक्षा का एकमात्र आधार मानने के मुख्य कारण ही शिक्षा प्राप्त करने के अन्य साधनों और शिक्षा केंद्रों की उपेक्षा की जाती है। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.)–2005 में आगे फिर इस बात पर बल दिया गया है कि शिक्षण और मूल्यांकन की विधियों से इस बात का भी निर्धारण होगा कि ये पाठ्यपुस्तकें स्कूल में बच्चों के मानसिक तनाव अथवा उबाऊपन की जगह प्रसन्नता का अनुभव कराने में कितनी प्रभावी होंगी । यह देश में वर्तमान परीक्षा प्रणाली में सुधार लाने के लिए भी आह्वान करता है।

नेशनल फोकस ग्रुप के विज्ञान शिक्षण, गणित शिक्षण और परीक्षा सुधार पर दृष्टिकोण-पत्र ध्यान दिलाते हैं कि विभिन्न बोर्डों द्वारा आयोजित वार्षिक परीक्षाओं के लिए निर्मित प्रश्न पत्र, विषयों की समझ का यथार्थ मूल्यांकन वास्तव में नहीं करते। प्रश्न-पत्रों की गुणवत्ता प्राय: प्रत्याशित स्तर की नहीं होती। ये सामान्यत: या रटकर याद की गई सूचनाएँ चाहते हैं और विवेचन एवं विश्लेषण जैसी उच्च कोटि के कौशलों का परीक्षण नहीं करते। साथ ही साथ विषय से संबंधित प्रासंगिक सोच, सृजनात्मकता और निर्णय लेने की क्षमता पर भी ध्यान नहीं देते। प्रश्न-पत्रों में अच्छे अपारंपरिक प्रश्न, चुनौतीपूर्ण प्रश्न और प्रयोग-आधारित प्रश्न बहुत कम पूछे जाते हैं। समस्या का समाधान करने और साथ ही अतिरिक्त अधिगम सामग्री उपलब्ध कराने के लिए विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग (डी.ई.एस.एम.) ने माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तरों के विभिन्न विषयों के लिए "प्रश्न प्रदर्शिका" की संदर्भ पुस्तकें विकसित करने का प्रयास किया है। प्रत्येक संदर्भ पुस्तक में विविध दुर्बोधता स्तरों वाले विभिन्न प्रकार के प्रश्न दिए गए हैं। कुछ प्रश्नों को हल करते समय विद्यार्थियों को एक साथ एक से अधिक संकल्पनाओं की

समझ से काम लेने की आवश्यकता होगी। ये प्रश्न मात्र परीक्षाओं के लिए प्रश्न बैंक के रूप में काम में लेने के लिए नहीं हैं बल्कि मुख्य रूप से स्कूलों में शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया की गुणवत्ता में सुधार लाने के लिए हैं। यह अपेक्षा की जाती है कि ये प्रश्न शिक्षकों को अच्छे प्रश्न तैयार करने के लिये प्रोत्साहित करेंगे। विद्यार्थियों और शिक्षकों को सदैव ध्यान रखना चाहिए कि परीक्षा और मूल्यांकन ऐसा होना चाहिए ताकि विद्यार्थी के बोध, ज्ञात सूचना का पुन: स्मरण, विश्लेषणात्मक सोच और समस्या-समाधान क्षमता, सृजनात्मकता और चिंतनशील क्षमता की जाँच परख हो जाए।

विषय और परीक्षाओं की उचित समझ रखने वाले विषय विशेषज्ञों और शिक्षकों की एक टीम ने बहुत अथक प्रयास करके यह कार्य पूरा किया है। तत्पश्चात् सामग्री पर परिचर्चा एवं संपादन के पश्चात् इसे संदर्भ पुस्तक में सम्मिलित किया गया है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् विद्यार्थियों, शिक्षकों और अभिभावकों के सुझावों का स्वागत करेगी जो आगामी संस्करणों में सामग्री की गुणवत्ता को बेहतर बनाने में सहायक होंगे।

नई दिल्ली
21 मई 2008

प्रोफ़ेसर यश पाल
अध्यक्ष
नेशनल स्टीयरिंग कमेटी
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्

आमुख

विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग (डी.ई.एस.एम.), राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) ने स्कूली शिक्षा की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.)–2005 के आधार पर तैयार की गयी पाठ्यपुस्तकों पर आधारित माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तरों पर विज्ञान एवं गणित विषयों में 'प्रश्न–प्रदर्शिका' (Exemplar Problems) के विकास का एक कार्यक्रम आरंभ किया है। वर्तमान पुस्तक, परिषद द्वारा सन्–2006 में कक्षा 12 के लिए प्रकाशित गणित पाठ्यपुस्तक, के विभिन्न अध्यायों पर आधारित है।

गणित में 'प्रश्न–प्रदर्शिका' पर पुस्तक का मुख्य उद्देश्य शिक्षकों तथा विद्यार्थियों को बड़ी संख्या में ऐसे स्तरीय प्रश्न उपलब्ध कराना है जिनका रूप–प्रारूप तो भिन्न हो ही साथ ही उनका दुर्बोधता–स्तर भी भिन्न–भिन्न हो। इससे कक्षा 12 की पाठ्यपुस्तक में दी गयी संकल्पनाओं को सीखने–सिखाने में आसानी होगी। यह बात ध्यान देने की है कि इस पुस्तक में सम्मिलित प्रश्नों से शिक्षकों को इकाई और सत्र परीक्षाओं के लिए उन्होंने जो संतुलित प्रश्न पत्र तैयार किए हैं उनके प्रभावी मूल्यांकन में उन्हें सहायता मिलेगी। विद्यार्थियों द्वारा दिए गए उत्तरों के विश्लेषण के आधार पर फीड–बैक प्राप्त कर शिक्षकों को शिक्षण की गुणवत्ता में और अधिक सुधार लाने में भी सहायता मिलेगी। इसके अतिरिक्त, इस पुस्तक में दिए गए प्रश्नों से शिक्षकों को अच्छी गुणवत्ता वाले प्रश्नों के मूलभूत लक्षणों को समझने में सहायता मिलेगी, साथ ही स्वयं उन्हें इसी प्रकार के प्रश्न बनाने के लिए प्रोत्साहन मिलेगा। विद्यार्थी पुस्तक में दिए गए प्रश्नों को हल करने के पश्चात् स्वयं का मूल्यांकन और प्रश्न हल करने की मौलिक तकनीक में प्रवीणता प्राप्त कर सकते हैं। पुस्तक में दिए गए कुछ प्रश्नों की सहायता से विद्यार्थी गणित की संकल्पनाओं को समझकर उन्हें नयी परिस्थितियों में उपयोग कर सकते हैं।

इस पुस्तक में सम्मिलित प्रश्नों को डी.ई.एस.एम. द्वारा आयोजित कार्यशालाओं में विकसित किया गया जिसमें शिक्षकों, विश्वविद्यालयों और उच्च शिक्षण संस्थानों के विषय–विशेषज्ञों तथा डी.ई.एस.एम. के गणित समूह के सदस्यों ने अपना योगदान दिया है। मैं उनके प्रयासों के लिए आभारी हूँ। उन्हें स्कूलों के लिए अच्छी गुणवत्ता वाली शिक्षण सामग्री उपलब्ध कराने के लिए धन्यवाद देता हूँ। समय–समय पर एन.सी.ई.आर.टी. के निदेशक प्रो.कृष्ण कुमार तथा संयुक्त निदेशक प्रो. जी.रविन्द्रा द्वारा प्रदत्त प्रोत्साहन एवं बहुमूल्य दिशानिर्देश हेतु कृतज्ञता प्रकट करता हूँ। विशेष रूप से मैं इस कार्यक्रम के समन्वयक डा.वी.पी.सिंह, प्रवाचक गणित, डी.ई.एस.एम. को धन्यवाद देता हूँ जिन्होंने इस कार्य को प्रकाशन के योग्य बनाया।

हम विद्यार्थियों, शिक्षकों और अभिभावकों से पुस्तक की सामग्री में और अधिक सुधार के लिए फीड–बैक की अपेक्षा करते हैं।

हुकुम सिंह
प्रो़फेसर एवं विभागाध्यक्ष

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न, समाजवादी, पंथ-निरपेक्ष, लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए तथा उसके समस्त नागरिकों को:

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म
और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**
प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सबमें** व्यक्ति की गरिमा और
राष्ट्र की एकता और अखंडता
सुनिश्चित करने वाली बंधुता बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हज़ार छह विक्रमी) को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

विकास समिति

प्रश्न प्रदर्शिका गणित

सदस्य

आर.पी.मौर्य, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

जे.सी.निझावन, *प्रधानाचार्य* (*सेवानिवृत्त*), शिक्षा निदेशालय, दिल्ली

डी.आर.शर्मा, *उप-प्रधानाचार्य*, जे.एन.वी. मौली, पंचकुला, हरियाणा

पी.के. चौरसिया, *प्रवक्ता*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

पी.के.जैन, *प्रोफ़ेसर एवं विभागाध्यक्ष* (*सेवानिवृत्त*) गणित विभाग दिल्ली विश्वविद्यालय दिल्ली

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर एवं विभागाध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

राम अवतार, *प्रोफ़ेसर* (*सेवानिवृत्त*), डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

राहुल सोफट, *प्रवक्ता*, एयर फोर्स गोल्डन जुबली इंस्टीट्यूट, सुब्रतो पार्क, नई दिल्ली

रीता ओजे, *प्रमुख* गणित अनुभाग, आर्मी पब्लिक स्कूल, धौला कुआँ, नई दिल्ली

संजय मुद्‌गल, *प्रवक्ता*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

संगीता अरोड़ा, *पी.जी.टी.* ए.पी.जे. स्कूल, साकेत, नई दिल्ली

सुनिल बजाज, *प्रमुख* गणित अनुभाग, एस.सी.ई.आर.टी. हरियाणा, गुड़गाँव

सदस्य-समन्वयक

वी.पी.सिंह, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

हिंदी रूपान्तरणकर्ता

एस.के.गौतम, *प्रोफ़ेसर* (*सेवानिवृत्त*), डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

पी.के.तिवारी, सहायक आयुक्त (*सेवानिवृत्त*), केंद्रीय विद्यालय संगठन, नई दिल्ली

महेन्द्र शंकर, *प्रवक्ता* (*एस.जी.*) (*सेवानिवृत्त*), डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

हिंदी - समन्वयक

वी.पी.सिंह, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

आभार

परिषद् प्रश्न प्रदर्शिका की समीक्षा के लिए आयोजित कार्यशाला के निम्नलिखित प्रतिभागियों का उनके बहुमूल्य योगदान के लिए हार्दिक आभार प्रकट करती है:

सत्यवान, *पी.जी.टी.* आर.एस.बी.वी. दल्लूपुरा, दिल्ली, दिनेश शर्मा, *पी.जी.टी.*, नवयुग स्कूल लोधी रोड, दिल्ली, ईश्वर चन्द्र (सेवानिवृत्त), *एस.जी., लेक्चरर*, रा.शै.अ.प्र.प., दिल्ली, ब्यास जी द्विवेदी (सेवानिवृत्त) *विभागाध्यक्ष* (गणित) सी.एम.पी. डिग्री कालेज इलाहाबाद (उत्तर प्रदेश), पी.के.तिवारी, *सहायक आयुक्त* (सेवानिवृत्त) केंद्रीय विद्यालय संगठन, दिल्ली तथा जी.डी.ढल (सेवानिवृत्त) *रीडर*, रा.शै.अ.प्र.प., दिल्ली।

परिषद् पुस्तक विकास की प्रक्रिया में सहयोग के लिए हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर* एवं *विभागाध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प. की विशेष रूप से आभारी है।

परिषद् कम्प्यूटर प्रभारी, दीपक कपूर; *डी.टी.पी. आपरेटर*, कमलेश राव तथा राकेश कुमार, दिशा धवन तथा *प्रतिसंपादक* दिग्विजय सिंह अत्री के प्रयासों के प्रति भी आभार प्रकट करती है। तकनीकी सहयोगी, प्रकाशन विभाग का योगदान भी सराहनीय है।

विषय सूची

अध्याय 1

संबंध एवं फलन

1.1 समग्र अवलोकन (Overview)

1.1.1 *संबंध*

किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध R कार्तीय गुणन $A \times B$ का एक उप-समुच्चय होता है। समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध R का प्रांत कहते हैं। समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय घटकों के समुच्चय को संबंध R का परिसर कहते हैं। संपूर्ण समुच्चय B संबंध R का सह-प्रांत कहलाता है। नोट कीजिए कि परिसर सदैव सह-प्रांत का एक उप-समुच्चय होता है।

1.1.2 *संबंधों के प्रकार*

किसी समुच्चय A से A में संबंध R, $A \times A$ का एक उप-समुच्चय होता है। अत: रिक्त समुच्चय ϕ तथा $A \times A$ (स्वयं), दो अन्त्य (   ) संबंध हैं।

(i) किसी समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R एक रिक्त संबंध कहलाता है, यदि A का कोई भी अवयव A के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है, अर्थात् $R = \phi \subset A \times A$

(ii) किसी समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R, एक सार्वत्रिक (universal) संबंध कहलाता है, यदि A का प्रत्येक अवयव A के सभी अवयव से संबंधित हैं, अर्थात् $R = A \times A$

(iii) समुच्चय A पर संबंध R स्वतुल्य (reflexive) कहलाता है, यदि सभी $a \in A$ के लिए $a\text{R}a$ R सममित (symmetric) कहलाता है, यदि $\forall\ a, b \in A$ के लिए $a\text{R}b \Rightarrow b\text{R}a$ तथा यह संक्रामक (transitive) कहलाता है, यदि $\forall\, a, b, c \in A$ के लिए $a\text{R}b$ तथा $b\text{R}c \Rightarrow a\text{R}c$ कोई भी संबंध, जो स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है, एक तुल्यता (equivalence) संबंध कहलाता है।

टिप्पणी किसी तुल्यता-संबंध का एक महत्वपूर्ण गुण यह है कि वह सबद्ध समुच्चय को युगलत: असंयुक्त उप-समुच्चयों में विभाजित कर देता है जिन्हें तुल्यता-वर्ग कहते हैं तथा जिनका संग्रह समुच्चय का विभाजन (partition) कहलाता है। नोट कीजिए कि सभी तुल्यता-वर्गों के सम्मिलन से संपूर्ण समुच्चय प्राप्त होता है।

1.1.3 *फलनों के प्रकार*

(i) कोई फलन $f: X \rightarrow Y$ एकैकी (one-one) [या एकैक (injective)] फलन कहलाता है, यदि

f के अंतर्गत X के भिन्न-भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भी भिन्न-भिन्न होते हैं, अर्थात्

$$x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(ii) फलन $f: X \to Y$ आच्छादक (onto) [या आच्छादी (surjective)] कहलाता है, यदि f के अंतर्गत Y का प्रत्येक अवयव, X के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिंब है, अर्थात् प्रत्येक $y \in Y$ के लिए, X में एक ऐसे अवयव x का अस्तित्व है कि $f(x) = y$

(iii) फलन $f: X \to Y$ एक एकैकी तथा आच्छादक [या एकैकी आच्छादी (bijective)] कहलाता है, यदि f एकैकी तथा आच्छादक दोनों ही होता है।

1.1.4 *फलनों का संयोजन*

(i) मान लीजिए कि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो फलन हैं। तब f तथा g का संयोजन, $g\,o\,f$, द्वारा निरूपित फलन $g\,o\,f: A \to C$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

$$g\,o\,f(x) = g(f(x)), \ \forall \ x \in A$$

(ii) यदि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ एकैकी हैं, तो $g\,o\,f: A \to C$ भी एकैकी होता है

(iii) यदि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ आच्छादक हैं, तो $g\,o\,f: A \to C$ भी आच्छादक होता है।

तथापि, उपर्युक्त कथित नियम (परिणाम) (ii) तथा (iii) के विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं होते हैं। इसके अतिरिक्त इस संबंध में निम्नलिखित नियम (परिणाम) हैं।

(iv) मान लीजिए कि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो दिए हुए फलन इस प्रकार हैं कि $g\,o\,f$ एकैकी है, तो f भी एकैकी है।

(v) मान लीजिए कि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो दिए हुए फलन इस प्रकार हैं कि $g\,o\,f$ आच्छादी है, तो g भी आच्छादी है।

1.1.5 *व्युत्क्रमणीय फलन*

(i) कोई फलन $f: X \to Y$ व्युत्क्रमणीय होता है, यदि एक फलन $g: Y \to X$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $g\,o\,f = I_X$ तथा $f\,o\,g = I_Y$. फलन g को फलन f का प्रतिलोम कहते हैं तथा प्रतीक f^{-1} से निरूपित करते हैं।

(ii) एक फलन $f: X \to Y$ व्युत्क्रमणीय होता है, यदि और केवल यदि f एकैकी आच्छादी है।

(iii) यदि $f: X \to Y, g: Y \to Z$ तथा $h: Z \to S$ तीन फलन हैं, तो $h\,o\,(g\,o\,f) = (h\,o\,g)\,o\,f$

(iv) मान लीजिए कि $f: X \to Y$ तथा $g: Y \to Z$ दो व्युत्क्रमणीय फलन हैं तो $g\,o\,f$ भी व्युत्क्रमणीय होता है, इस प्रकार कि $(g\,o\,f)^{-1} = f^{-1}\,o\,g^{-1}$.

1.1.6 *द्वि-आधारी संक्रियाएँ*

(i) किसी समुच्चय A में एक द्वि-आधारी संक्रिया $*$ एक फलन $*: A \times A \to A$.है। हम $*(a, b)$ को $a * b$ द्वारा निरूपित करते हैं।

(ii) समुच्चय X में एक द्वि-आधारी संक्रिया $*$ क्रम-विनिमेय कहलाती है, यदि प्रत्येक $a, b \in X$ के लिए $a * b = b * a$

(iii) एक द्वि-आधारी संक्रिया $* : A \times A \to A$ साहचर्य कहलाती है, यदि प्रत्येक $a, b, c \in A$ के लिए $(a * b) * c = a * (b * c)$

(iv) किसी प्रदत्त द्वि-आधारी संक्रिया $* : A \times A \to A$ के लिए, एक अवयव $e \in A$, यदि इसका अस्तित्व है, संक्रिया $*$ का तत्समक (identity) कहलाता है, यदि $a * e = a = e * a, \forall\ a \in A$

(v) A में तत्समक अवयव e वाले प्रदत्त एक द्वि-आधारी संक्रिया $* : A \times A \to A$, के लिए, किसी अवयव $a \in A$ को संक्रिया $*$ के संदर्भ में व्युत्क्रमणीय कहते हैं, यदि A में एक ऐसे अवयव b का अस्तित्व इस प्रकार है कि $a * b = e = b * a$ तथा b को a का प्रतिलोम (inverse) कहते हैं और जिसे प्रतीक a^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं।

1.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 मान लीजिए कि $A = \{0, 1, 2, 3\}$ तथा A में एक संबंध R निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कीजिए:

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$$

क्या R स्वतुल्य, सममित, संक्रामक है?

हल R स्वतुल्य तथा सममित है, परंतु संक्रामक नहीं है, क्योंकि $(1, 0) \in R$ तथा $(0, 3) \in R$ जब कि $(1, 3) \notin R$

उदाहरण 2 समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$, के लिए एक संबंध R नीचे लिखे अनुसार परिभाषित कीजिए:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$$

उन क्रमित युग्मों को लिखिए, जिनको R में जोड़ने से वह न्यूनतम (छोटे से छोटा) तुल्यता संबंध बन जाए।

हल (3, 1) एक अकेला क्रमित युग्म है जिसको R में जोड़ने से वह छोटे से छोटा तुल्यता संबंध बन जाता है।

उदाहरण 3 मान लीजिए कि $R = \{(a, b) :$ संख्या $2, a - b$ को विभाजित करती है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R पूर्णांकों के समुच्चय **Z** में तुल्यता संबंध है। तुल्यता-वर्ग [0] लिखिए।

हल $[0] = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$

उदाहरण 4 मान लीजिए कि फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x - 1, \ \forall\ x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

हल किन्हीं दो अवयव $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, इस प्रकार कि $f(x_1) = f(x_2)$, के लिए

$$4x_1 - 1 = 4x_2 - 1$$

$$\Rightarrow \quad 4x_1 = 4x_2, \text{ अर्थात् } x_1 = x_2$$

अत: f एकैकी है।

उदाहरण 5 यदि $f = \{(5, 2), (6, 3)\}, g = \{(2, 5), (3, 6)\}$, तो $f \, o \, g$ लिखिए।

हल $f \, o \, g = \{(2, 2), (3, 3)\}$

उदाहरण 6 मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x - 3 \; \forall \; x \in \mathbf{R}$. द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f^{-1} लिखिए।

हल दिया हुआ है कि $f(x) = 4x - 3 = y$, (मान लीजिए), तो

$$4x = y + 3$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{y+3}{4}$$

अत: $$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{4}$$

उदाहरण 7 क्या **Z** (पूर्णांकों का समुच्चय) में $m * n = m - n + mn \;\; \forall \, m, n \in \mathbf{Z}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी-संक्रिया $*$ क्रम-विनिमेय है?

हल $*$ क्रमविनिमेय नहीं है, क्योंकि $1, 2 \in \mathbf{Z}$ तथा $1 * 2 = 1 - 2 + 1.2 = 1$ जब कि $2 * 1 = 2 - 1 + 2.1 = 3$ इस प्रकार $1 * 2 \neq 2 * 1$.

उदाहरण 8 यदि $f = \{(5, 2), (6, 3)\}$ तथा $g = \{(2, 5), (3, 6)\}$, तो f तथा g के परिसर लिखिए।

हल f का परिसर $\{2, 3\}$ तथा g का परिसर $= \{5, 6\}$

उदाहरण 9 यदि $A = \{1, 2, 3\}$ तथा f, g, $A \times A$ के उप-समुच्चय के संग निम्नलिखित प्रकार सूचित संबंध हैं

$$f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$$
$$g = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$$

f तथा g में से कौन फलन है और क्यों?

हल f एक फलन है क्योंकि क्रमित युग्मों में प्रथम स्थान (घटक) में A का प्रत्येक अवयव द्वितीय स्थान (घटक) में A के केवल एक ही अवयव से संबंधित है जब कि g एक फलन नहीं है क्योंकि 1, A के एक से अधिक अवयवों से संबंधित है, नामत: 2 तथा 3 से।

उदाहरण 10 यदि $A = \{a, b, c, d\}$ तथा $f = \{a, b), (b, d), (c, a), (d, c)\}$ तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है तथा A से A पर आच्छादी है। f^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल f एकैकी है, क्योंकि A का प्रत्येक अवयव समुच्चय A के एक अद्वितीय अवयव से निर्दिष्ट (संबंधित) है। साथ ही f आच्छादी है, क्योंकि $f(A) = A$ । इसके अतिरिक्त $f^{-1} = \{(b, a), (d, b), (a, c), (c, d)\}$.

उदाहरण 11 प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में $m * n = g.c.d\ (m, n),\ m, n \in \mathbf{N}$ द्वारा द्वि-आधारी-संक्रिया $*$ परिभाषित कीजिए। क्या संक्रिया $*$ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है?

हल संक्रिया स्पष्टत: क्रम-विनिमेय है, क्योंकि

$$m * n = g.c.d\ (m, n) = g.c.d\ (n, m) = n * m \quad \forall\, m, n \in \mathbf{N}$$

यह साहचर्य भी है, क्योंकि $l, m, n \in \mathbf{N}$ के लिए,

$$\begin{aligned} l * (m * n) &= g.\ c.\ d\ (l, g.c.d\ (m, n)) \\ &= g.c.d.\ (g.\ c.\ d\ (l, m), n) \\ &= (l * m) * n \end{aligned}$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A)

उदाहरण 12 प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में एक संबंध R निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कीजिए:

$\forall\, n, m \in \mathbf{N}$, $n\text{R}m$ यदि n तथा m में से प्रत्येक संख्या को 5 से विभाजित करने पर शेषफल 5 से कम बचता है, अर्थात् 0, 1, 2, 3 तथा 4 में से कोई एक संख्या। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। साथ ही R द्वारा निर्धारित युगलत: असंयुक्त उप-समुच्चयों को भी ज्ञात कीजिए।

हल R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक $a \in \mathbf{N}$ के लिए $a\text{R}a$, R सममित है, क्योंकि $a, b, \in \mathbf{N}$ के लिए, यदि $a\text{R}b$, तथा $b\text{R}a = 54\pm$, साथ ही, R संक्रामक है, क्योंकि $a, b, c \in \mathbf{N}$ के लिए, यदि $a\text{R}b$ तथा $a\text{R}c$ तो $a\text{R}c$ अत: R, N में एक तुल्यता संबंध है, जो समुच्चय **N** का युगलत: असंयुक्त उपसमुच्चयों में विभाजन (partition) कर देता है। इस विभाजन से प्राप्त तुल्यता-वर्ग नीचे उल्लिखित हैं:

$$A_0 = \{5, 10, 15, 20 \ldots\}$$
$$A_1 = \{1, 6, 11, 16, 21 \ldots\}$$
$$A_2 = \{2, 7, 12, 17, 22, \ldots\}$$
$$A_3 = \{3, 8, 13, 18, 23, \ldots\}$$
$$A_4 = \{4, 9, 14, 19, 24, \ldots\}$$

यह सुस्पष्ट है कि उपर्युक्त पाँच समुच्चय युगलत: असंयुक्त हैं तथा

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \bigcup_{i=0}^{4} A_i = \mathbf{N}$$

उदाहरण 13 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \forall\, x \in \mathbf{R}$, द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ न तो एकैकी है और न आच्छादी है।

हल $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, के लिए विचार कीजिए कि

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2^2 + x_1 = x_2 x_1^2 + x_2$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 (x_2 - x_1) = x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ या } x_1 x_2 = 1$$

हम देखते हैं कि x_1 तथा x_2 ऐसे दो अवयव हो सकते हैं कि $x_1 \neq x_2$ फिर भी $f(x_1) = f(x_2)$, उदाहरणार्थ हम $x_1 = 2$ तथा $x_2 = \dfrac{1}{2}$, लेते हैं, तो $f(x_1) = \dfrac{2}{5}$ तथा $f(x_2) = \dfrac{2}{5}$ परंतु $2 \neq \dfrac{1}{2}$ अतः f एकैकी नहीं है। साथ ही, f आच्छादी भी नहीं है क्योंकि, यदि ऐसा है, तो $1 \in \mathbf{R}$ के लिए $\exists\, x \in \mathbf{R}$ इस प्रकार कि $f(x) = 1$, जिससे $\dfrac{x}{x^2+1} = 1$ प्राप्त होता है। परंतु प्रांत **R** में ऐसा कोई अवयव नहीं है क्योंकि समीकरण $x^2 - x + 1 = 0$, x का कोई वास्तविक मान नहीं देता है।

उदाहरण 14 मान लीजिए कि $f(x) = |x| + x$ तथा $g(x) = |x| - x \;\; \forall\, x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ दो फलन हैं, तो fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $f(x) = |x| + x$ जिसे निम्नलिखित प्रकार से पुनः परिभाषित कर सकते हैं:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{यदि } x \geq 0 \\ 0 & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

इसी प्रकार, $g(x) = |x| - x$ द्वारा परिभाषित फलन g निम्नलिखित प्रकार से पुनः परिभाषित किया जा सकता है,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } x \geq 0 \\ -2x & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

इसलिए $g\,o\,f$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित होगा:

$x \geq 0$ के लिए, $(g\,o\,f)\,(x) = g\,(f\,(x) = g\,(2x) = 0$

तथा $x < 0$, के लिए $(g\,o\,f)\,(x) = g\,(f\,(x) = g\,(0) = 0$

फलस्वरूप, $(g\,o\,f)\,(x) = 0, \;\forall\; x \in \mathbf{R}$.

इसी प्रकार $f\,o\,g$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित होता है:

$x \geq 0$ के लिए, $(f\,o\,g)\,(x) = f\,(g\,(x) = f\,(0) = 0$ तथा

$x < 0$ के लिए, $(f\,o\,g)\,(x) = f\,(\text{g}(x)) = f\,(-2\,x) = -\,4x$

अर्थात्, $(f\,o\,g)\,(x) = \begin{cases} 0, x > 0 \\ -4x, x < 0 \end{cases}$

उदारण 15 मान लीजिए कि $\mathbf{R}$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ एक फलन है, जो $f\,(x) = 4x + 5$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा f^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ फलन $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है: $f\,(x) = 4x + 5 = y$ (मान लीजिए), तो

$$4x = y - 5 \qquad \text{या} \qquad x = \frac{y-5}{4}$$

जिससे $g\,(y) = \dfrac{y-5}{4}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ मिलता है।

इसलिए $\qquad (g\,o\,f)\,(x) = g(f\,(x) \quad = g\,(4x + 5)$

$$= \frac{4x+5-5}{4} = x$$

या $\qquad g\,o\,f = \mathrm{I_R}$

इसी प्रकार $\qquad (f\,o\,g)\,(y) = f\,(g(y))$

$$= f\left(\frac{y-5}{4}\right)$$

$$= 4\left(\frac{y-5}{4}\right)+5 = y$$

या $$f \circ g = I_R.$$

अत: f व्युत्क्रमणीय है तथा $f^{-1} = g$, जिससे $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{4}$ मिलता है।

उदाहरण 16 मान लीजिए कि Q में परिभाषित $*$ एक द्वि-आधारी संक्रिया है। ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित द्वि-आधारी संक्रियाओं में से कौन-कौन साहचर्य हैं:

(i) $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए $a * b = a - b$

(ii) $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए $a * b = \frac{ab}{4}$

(iii) $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए $a * b = a - b + ab$

(iv) $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए $a * b = ab^2$

हल

(i) $*$ साहचर्य नहीं है, क्योंकि यदि हम $a = 1, b = 2$ तथा $c = 3$, लेते हैं, तो

$(a * b) * c = (1 * 2) * 3 = (1 - 2) * 3 = -1 - 3 = -4$ तथा

$a * (b * c) = 1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3) = 1 - (-1) = 2$

अत: $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ और इसलिए $*$ साहचर्य नहीं है।

(ii) $*$ साहचर्य है, क्योंकि $\mathbf{Q}$ में गुणन साहचर्य होता है।

(iii) $*$ साहचर्य नहीं है, क्योंकि यदि हम $a = 2, b = 3$ तथा $c = 4$ लेते हैं, तो

$(a * b) * c = (2 * 3) * 4 = (2 - 3 + 6) * 4 = 5 * 4 = 5 - 4 + 20 = 21$, तथा

$a * (b * c) = 2 * (3 * 4) = 2 * (3 - 4 + 12) = 2 * 11 = 2 - 11 + 22 = 13$

अत: $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ और इसलिए $*$ साहचर्य नहीं है।

(iv) $*$ साहचर्य नहीं है, क्योंकि यदि हम $a = 1, b = 2$ तथा $c = 3$ लेते हैं, तो

$(a * b) * c = (1 * 2) * 3 = 4 * 3 = 4 \times 9 = 36$ तथा

$a * (b * c) = 1 * (2 * 3) = 1 * 18 = 1 \times 18^2 = 324$

अत: $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ और इसलिए $*$ संक्रामक नहीं है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 17 से 25 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

उदाहरण 17 मान लीजिए कि R प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में एक संबंध है, जो $n\mathrm{R}m$ यदि n विभाजित करता है m को, द्वारा परिभाषित है, तो R

(A) स्वतुल्य एवं सममित है। (B) संक्रामक एवं सममित है

(C) तुल्यता संबंध है (D) स्वतुल्य, संक्रामक है परंतु सममित नहीं है

हल सही विकल्प (D) है,

क्योंकि n विभाजित करता है n को, $\forall\ n \in \mathbf{N}$, तो R स्वतुल्य है। R सममित नहीं है, क्योंकि $3, 6 \in \mathbf{N}$ परंतु $^3\mathrm{R}_6 \neq 6 \mathrm{R} 3$. R संक्रामक है, क्योंकि n, m, r के लिए जब-जब n/m तथा $m/r \Rightarrow n/r$, अर्थात्, जब-जब n विभाजित करता है r को।

उदाहरण 18 मान लीजिए कि L किसी समतल में स्थित सभी सरल रेखाओं के समुच्चय को निरूपित करता है। मान लीजिए कि एक संबंध R, नियम $l\mathrm{R}m$ यदि और केवल यदि l लम्ब है m पर, $\forall\ l, m \in \mathrm{L}$, द्वारा परिभाषित है। तब R

(A) स्वतुल्य है (B) सममित है (C) संक्रामक है (D) इनमें से कोई भी नहीं है

हल सही विकल्प (B) है।

उदाहरण 19 मान लीजिए कि **N** प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है तथा $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N},\ f(n) = 2n + 3\ \forall\ n \in \mathbf{N}$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f

(A) आच्छादी है (B) एकैक है (C) एकैकी आच्छादी है (D)इनमें से कोई भी नहीं है

हल (B) सही विकल्प है।

उदाहरण 20 समुच्चय A में 3 अवयव हैं तथा समुच्चय B में 4 अवयव हैं, तो A से B में परिभाषित एकैक प्रतिचित्रणों की संख्या

(A) 144 (B) 12 (C) 24 (D) 64

हल सही विकल्प (C) है। 3 अवयव वाले समुच्चय से 4 अवयव वाले समुच्चय में एकैक प्रतिचित्रणों की कुल संख्या $^4\mathrm{P}_3$ है। अर्थात् $4! = 24$

उदाहरण 21 मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},\ f(x) = \sin x$ तथा $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\ g(x) = x^2$, द्वारा परिभाषित हैं, तो $f \circ g$

(A) $x^2 \sin x$ (B) $(\sin x)^2$ (C) $\sin x^2$ (D) $\dfrac{\sin x}{x^2}$

हल (C) सही विकल्प है।

उदाहरण 22 मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 4$, द्वारा परिभाषित है, तो $f^{-1}(x)$

(A) $\dfrac{x+4}{3}$ (B) $\dfrac{x}{3} - 4$ (C) $3x + 4$ (D) इनमें से कोई नहीं है।

हल (A) सही विकल्प है।

उदाहरण 23 मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ द्वारा परिभाषित है, तो 17 तथा –3 के पूर्व प्रतिबिम्ब क्रमशः.

(A) ϕ, $\{4, -4\}$ (B) $\{3, -3\}$ (C) $\{4, -4\}$, ϕ (D) $\{4, -4\}$, $\{2, -2\}$ है।

हल (C) सही विकल्प है, क्योंकि $f^{-1}(17) = x \Rightarrow f(x) = 17$ या $x^2 + 1 = 17 \Rightarrow x = \pm 4$ या $f^{-1}(17) = \{4, -4\}$ तथा $f^{-1}(-3)$ के लिए, $f^{-1}(-3) = x \Rightarrow f(x) = -3 \Rightarrow x^2 + 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -4$ अतः $f^{-1}(-3) = \phi$

उदाहरण 24 वास्तविक संख्याओं x तथा y के लिए परिभाषित कीजिए कि $x\text{R}y$, यदि और केवल यदि $x - y + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है, तो संबंध R

(A) स्वतुल्य है (B) सममित है (C) संक्रामक है (D) इनमें से कोई भी नहीं है

हल (A) सही विकल्प है।

उदाहरण 25 से 30 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

उदाहरण 25 समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ पर विचार कीजिए तथा R, A में छोटे से छोटा तुल्यता संबंध है, तो R = _________

हल $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

उदाहरण 26 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का प्रांत _________ है।

हल यहाँ $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 2) \geq 0$

$\Rightarrow x \leq 1$ या $x \geq 2$

अतः f का प्रांत $= (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

उदाहरण 27 n अवयवों वाले समुच्चय A पर विचार कीजिए। A से स्वयं A पर एकैकी आच्छादक फलनों की कुल संख्या _________ है।

हल $n!$

उदाहरण 28 मान लीजिए कि **Z** पूर्णांकों का समुच्चय है तथा R, **Z** में परिभाषित एक संबंध इस प्रकार है कि $a\text{R}b$, यदि $a - b$ भाज्य है 3 से, तो R समुच्चय Z को _________ युगलतः असंयुक्त उप-समुच्चयों में विभाजन करता है।

हल तीन

उदाहरण 29 मान लीजिए कि **R** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा **R** में एक द्वि-आधारी संक्रिया $*$ इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = a + b - ab \quad \forall \ a, b \in \mathbf{R}$. तो द्वि-आधारी संक्रिया $*$ के लिए तत्समक अवयव________है।

हल द्वि-आधारी सक्रिया $*$ के लिए तत्समक अवयव 0 है।

उदाहरण 30 से 34 तक प्रत्येक में प्रदत्त कथन सत्य हैं या असत्य हैं–

उदाहरण 30 समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ तथा संबंध $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$ पर विचार कीजिए। R एक संक्रामक संबंध है।

हल सत्य है।

उदाहरण 31 मान लीजिए कि A एक परिमित समुच्चय है, तो A से स्वयं A में प्रत्येक एकैक फलन आच्छादी नहीं है।

हल असत्य है।

उदाहरण 32 समुच्चय A, B तथा C के लिए, मान लीजिए कि $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ फलन इस प्रकार के हैं कि फलन $g \, o \, f$ एकैक है, तो f तथा g दोनों ही एकैक फलन हैं।

हल असत्य है।

उदाहरण 33 समुच्चय A, B तथा C के लिए, मान लीजिए कि $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ फलन इस प्रकार के हैं कि फलन $g \, o \, f$ आच्छादी है, तो g भी आच्छादी है।

हल सत्य है।

उदाहरण 34 मान लीजिए कि **N** प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, तो $a * b = a + b, \ \forall \ a, b \in \mathbf{N}$ द्वारा **N** में परिभाषित द्वि-आधारी संक्रिया $*$ के लिए तत्समक अवयव है।

हल असत्य है।

1.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (SA)

1. मान लीजिए कि $A = \{a, b, c\}$ तथा A में परिभाषित संबंध R निम्नलिखित है:
$R = \{(a, a), (b, c), (a, b)\}$. तो उन क्रमित युग्मों की, कम से कम, संख्या लिखिए, जिनको R में जोड़ने से R स्वतुल्य तथा संक्रामक बन जाता है।

2. मान लीजिए कि D, $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ द्वारा परिभाषित, वास्तविक मान फलन f का प्रांत है, तो D को लिखिए।

3. मान लीजिए कि $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ क्रमशः $f(x) = 2x + 1$ तथा $g(x) = x^2 - 2$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित हैं, तो $g\,o\,f$ ज्ञात कीजिए।

4. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ फलन $f(x) = 2x - 3$ $\forall\, x \in$ R द्वारा परिभाषित है। f^{-1} लिखिए।

5. यदि $A = \{a, b, c, d\}$ तथा फलन $f = \{(a, b), (b, d), (c, a), (d, c)\}$, तो f^{-1} लिखिए।

6. यदि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित है, तो $f(f(x))$ लिखिए।

7. क्या $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ एक फलन है? यदि g, $g(x) = \alpha x + \beta$ द्वारा वर्णित है, तो α तथा β का मान क्या निर्धारित होना चाहिए?

8. क्या क्रमित युग्मों के निम्नलिखित समुच्चय, फलन हैं? यदि ऐसा है, तो जाँच कीजिए कि प्रतिचित्रण एकैक अथवा आच्छादी हैं कि नहीं हैं।

(i) $\{(x, y)$: x एक व्यक्ति है, y माँ है x की$\}$

(ii) $\{(a, b)$: a एक व्यक्ति है, b पूर्वज है a का$\}$

9. यदि प्रतिचित्रण f तथा g क्रमशः $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ तथा $g = \{(2, 3), (5, 1), (1, 3)\}$ द्वारा दत्त हैं, तो $f\,o\,g$ लिखिए।

10. मान लीजिए कि $\mathbf{C}$ सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि $f(z) = |z|$, $\forall\, z \in \mathbf{C}$ द्वारा दत्त प्रतिचित्रण $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ न तो एकैकी है और न आच्छादक (आच्छादी) है।

11. मान लीजिए कि फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f न तो एकैकी है और न आच्छादक (आच्छादी) है।

12. मान लीजिए कि $X = \{1, 2, 3\}$ तथा $Y = \{4, 5\}$. ज्ञात कीजिए कि क्या $X \times Y$ के निम्नलिखित उपसमुच्चय X से Y में फलन हैं या नहीं हैं।

(i) $f = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 5)\}$ (ii) $g = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(iii) $h = \{(1,4), (2, 5), (3, 5)\}$ (iv) $k = \{(1,4), (2, 5)\}$

13. यदि फलन $f : A \to B$ तथा $g : B \to A$, $g\,o\,f = I_A$ को संतुष्ट करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैक है तथा g आच्छादक है।

14. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos x}$ x $\mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f का परिसर ज्ञात कीजिए।

15. मान लीजिए कि n एक निश्चित (स्थिर) धन पूर्णांक है। $\mathbf{Z}$ में एक संबंध R निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कीजिए: a, b $\mathbf{Z}$, aRb यदि और केवल यदि $a - b$ भाज्य है n से। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

16. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, तो A में निम्नलिखित गुणों वाले संबंधों को परिभाषित कीजिए:

(a) स्वतुल्य तथा संक्रामक हों किंतु सममित नहीं हों।

(b) सममित हों परन्तु न तो स्वतुल्य हों और न संक्रामक हों।

(c) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हों।

17. मान लीजिए कि R, प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित एक संबंध है।

$R = \{(x, y): x \quad \mathbf{N}, y \quad \mathbf{N}, 2x + y = 41\}$. संबंध R का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए। साथ ही सत्यापित (जाँच) कीजिए कि क्या R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

18. दिया हुआ है कि $A = \{2, 3, 4\}, B = \{2, 5, 6, 7\}$ निम्नलिखित में से प्रत्येक के एक उदाहरण की रचना कीजिए:

(a) A से B में एक एकैक प्रतिचित्रण।

(b) A से B में एक ऐसा प्रतिचित्रण, जो एकैक नहीं है।

(c) B से A में एक प्रतिचित्रण।

19. एक ऐसे प्रतिचित्रण का उदाहरण दीजिए जो–

(i) एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है।

(ii) एकैकी नहीं है किंतु आच्छादक है।

(iii) न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

20. मान लीजिए कि $A = \mathbf{R} - \{3\}, B = \mathbf{R} - \{1\}$. मान लीजिए कि $f: A \rightarrow B$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

$x \quad$ A द्वारा परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी आच्छादी है।

21. मान लीजिए कि $A = [-1, 1]$, तो विचार कीजिए कि क्या A में परिभाषित निम्नलिखित फलन एकैकी, आच्छादक या एकैकी आच्छादी हैं:

(i) $f(x) \quad \dfrac{x}{2}$ (ii) $g(x) = |x|$ (iii) $h(x) \quad x|x|$ (iv) $k(x) = x^2$

22. निम्नलिखित में से प्रत्येक **N** में एक संबंध परिभाषित करते हैं:

(i) x बड़ा है y से, $x, y \quad \mathbf{N}$ (ii) $x + y = 10, x, y \quad \mathbf{N}$

(iii) $x\,y$ किसी पूर्णांक का वर्ग है, $x, y \quad \mathbf{N}$ (iv) $x + 4y = 10 \;\; x, y \quad \mathbf{N}$

निर्धारित कीजिए कि उपर्युक्त संबंधों में से कौन-से संबंध स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं।

23. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, ... 9\}$ तथा $A \times A$ में $(a, b), (c, d)$ के लिए (a, b) R (c, d) यदि और केवल यदि $a + d = b + c$ द्वारा परिभाषित R एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है तथा तुल्यता-वर्ग $[(2, 5)]$ भी प्राप्त (ज्ञात) कीजिए।

24. परिभाषा का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि फलन $f: A \to B$ व्युत्क्रमणीय है, यदि और केवल यदि, f एकैकी तथा आच्छादक दोनो है।

25. फलन $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ क्रमशः $f(x) = x^2 + 3x + 1$ तथा $g(x) = 2x - 3$ द्वारा परिभाषित हैं, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $f \circ g$ (ii) $g \circ f$ (iii) $f \circ f$ (iv) $g \circ g$

26. मान लीजिए कि एक द्वि-आधारीय संक्रिया $*$ $\mathbf{Q}$ में परिभाषित है। ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित द्वि-आधारी संक्रियाओं में से कौन-कौन सी संक्रियाएँ क्रम-विनिमेय हैं

(i) $a * b = a - b \quad a, b \in \mathbf{Q}$ (ii) $a * b = a^2 + b^2 \quad a, b \in \mathbf{Q}$

(iii) $a * b = a + ab \quad a, b \in \mathbf{Q}$ (iv) $a * b = (a - b)^2 \quad a, b \in \mathbf{Q}$

27. मान लीजिए कि R में द्वि-आधारी संक्रिया $*$, $a * b = 1 + ab$, $\quad a, b \in \mathbf{R}$. तो संक्रिया $*$

(i) क्रम-विनिमेय है किंतु साहचर्य नहीं है। (ii)साहचर्य है किंतु क्रम-विनिमेय नहीं है।

(iii) न तो क्रम-विनिमेय है और न साहचर्य है। (iv)क्रम-विनिमेय तथा साहचर्य दोनों ही है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 28 से 47 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

28. मान लीजिए कि T, युक्लिडीय समतल में, सभी त्रिभुजों का समुच्चय है तथा मान लीजिए कि T में एक संबंध R इस प्रकार परिभाषित है कि $a\text{R}b$, यदि a सर्वांगसम है b के, $a, b \in \text{T}$, तो R

(A) स्वतुल्य है किंतु संक्रामक नहीं है। (B) संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

(C) तुल्यता संबंध है। (D) इनमें से कोई नहीं है।

29. किसी परिवार में बच्चों के अरिक्त समुच्चय तथा $a\text{R}b$, यदि a भाई है b का, द्वारा परिभाषित संबंध R पर विचार कीजिए, तो R

(A) सममित है किन्तु संक्रामक नहीं है। (B) संक्रामक है किन्तु सममित नही है।

(C) न तो सममित है और न संक्रामक है (D) सममित तथा संक्रामक दोनों है।

30. समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में तुल्यता संबंधों की अधिकतम संख्या

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 है।

31. यदि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 2)\}$ द्वारा परिभाषित एक संबंध R है, तो R

(A) स्वतुल्य है (B) संक्रामक है (C) सममित है (D)इनमें से कोई भी नहीं है

32. मान लीजिए कि हम R में एक संबंध **R** इस प्रकार परिभाषित करें कि $a\text{R}b$, यदि $a \geq b$, तो R

(A) एक तुल्यता संबंध है (B) स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है

(C) सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं हैं (D) न तो संक्रामक है और न स्वतुल्य है किंतु सममित है

33. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$ संबंध $R = \{1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1,3)\}$ पर विचार कीजिए, तो R

(A) स्वतुल्य है किंतु सममित नहीं है (B) स्वतुल्य है किंतु संक्रामक नहीं है

(C) सममित तथा संक्रामक है (D) न तो सममित है और न संक्रामक है

34. $Q \sim \{0\}$ में $a * b = \dfrac{ab}{2}$ $a, b \in Q \sim \{0\}$ प्रकार से परिभाषित द्वि–आधारी संक्रिया $*$ का (के लिए) तत्सम अवयव

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं है।

35. यदि समुच्चय A में 5 अवयव हैं तथा समुच्चय B में 6 अवयव हैं, तो A से B में एकैकी तथा आच्छादक प्रतिचित्रणों की संख्या

(A) 720 है (B) 120 है (C) 0 है (D) इनमें से कोई नहीं है

36. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, ...n\}$ तथा $B = \{a, b\}$, तो A से B में आच्छादी प्रतिचित्रों (प्रतिचित्रणों) की संख्या

(A) ${}^{n}P_2$ है (B) $2^n - 2$ है (C) $2^n - 1$ है (D) इनमें से कोई नहीं है

37. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$ $x \in \mathbf{R}$ के द्वारा परिभाषित है, तो f

(A) एकैकी है (B)आच्छादक है (C) एकैकी आच्छादी है (D) f परिभाषित नहीं है

38. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = 3x^2 - 5$ द्वारा तथा $g : \text{R} \to \mathbf{R}$ $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ द्वारा परिभाषित है, तो $g \circ f$ निम्नलिखित है,

(A) $\dfrac{3x^2-5}{9x^4-30x^2+26}$ (B) $\dfrac{3x^2-5}{9x^4-6x^2+26}$ (C) $\dfrac{3x^2}{x^4+2x^2-4}$ (D) $\dfrac{3x^2}{9x^4+30x^2-2}$

39. **Z** से **Z** में निम्नलिखित फलनों से कौन-से एकैकी आच्छादी हैं?

(A) $f(x) = x^3$ (B) $f(x) = x + 2$ (C) $f(x) = 2x + 1$ (D) $f(x) = x^2 + 1$

40. मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 5$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो $f^{-1}(x)$ निम्नलिखित है,

(A) $(x+5)^{\frac{1}{3}}$ (B) $(x-5)^{\frac{1}{3}}$ (C) $(5-x)^{\frac{1}{3}}$ (D) $5 - x$

41. मान लीजिए कि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ एकैकी आच्छादी फलन हैं, तो $(g\, o\, f)^{-1}$ निम्नलिखित है,

(A) $f^{-1}\, o\, g^{-1}$ (B) $f\ o\ g$ (C) $g^{-1}\, o\, f^{-1}$ (D) $g\ o\ f$

42. मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{3x+2}{5x-3}$ द्वारा परिभाषित है, तो

(A) $f^{-1}(x) = f(x)$ (B) $f^{-1}(x) = -f(x)$

(C) $(f\, o\, f)\, x = -x$ (D) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{19} f(x)$

43. मान लीजिए कि $f: [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \begin{bmatrix} x, \text{ यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1-x, \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{bmatrix}$ द्वारा परिभाषित है, तो $(f\, o\, f)\, x$

(A) अचर है (B) $1 + x$ है (C) x है (D) इनमें से कोई नहीं है

44. मान लीजिए कि $f: [2, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f का परिसर

(A) **R** है (B) $[1, \infty)$ है (C) $[4, \infty)$ है (D) $[5, \infty)$ है

45. मान लीजिए कि $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{2}$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तथा $g: \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + 2$ द्वारा परिभाषित एक अन्य फलन है, तो $(g\, o\, f)\left(\dfrac{3}{2}\right)$

(A) 1 है (B) 1 है (C) $\dfrac{7}{2}$ है (D) इनमें से कोई नहीं है

46. मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x : x > 3 \\ x^2 : 1 < x \leq 3 \\ 3x : x \leq 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है, तो $f(-1) + f(2) + f(4)$

(A) 9 है (B) 14 है (C) 5 है (D) इनमें से कोई नहीं है

47. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \tan x$ द्वारा दत्त है, तो $f^{-1}(1)$

(A) $\frac{\pi}{4}$ है (B) $\{n\pi + \frac{\pi}{4} : n \in Z\}$ है

(C) का अस्तित्व नहीं है। (D) इनमें से कोई नहीं है

प्रश्न संख्या 48 से 52 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

48. मान लीजिए कि **N** में एक संबंध R, $a\text{R}b$ यदि $2a + 3b = 30$ द्वारा परिभाषित है, तो R = _______.

49. मान लीजिए कि A = {1, 2, 3, 4, 5} में एक संबंध R = $\{(a, b) : |a^2 - b^2| < 8$ द्वारा परिभाषित है, तो R ________ द्वारा व्यक्त है।

50. मान लीजिए कि $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ तथा $g = \{(2, 3), (5, 1), (1, 3)\}$ तो $g \circ f$ = ________ तथा $f \circ g$ = ________.

51. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ · द्वारा परिभाषित है, तो $(f \circ f \circ f)(x)$ = ________

52. यदि $f(x) = (4 - (x-7)^3\}$, तो $f^{-1}(x)$ = ______________.

बतलाइए कि प्रश्न संख्या 53 से 62 तक प्रत्येक के कथन सत्य हैं या असत्य हैं–

53. मान लीजिए कि समुच्चय A = {1, 2, 3} में परिभाषित एक संबंध R = {(3, 1), (1, 3), (3, 3)}, तो R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

54. मान लीजिए $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin(3x+2)$, $x \in$ R द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f व्युत्क्रमणीय है।

55. प्रत्येक संबंध जो सममित तथा संक्रामक है स्वतुल्य भी है।

56. एक पूर्णांक m एक अन्य पूर्णांक n से संबंधित कहलाता है, यदि m एक पूर्णांकीय गुणज है n का। **Z** में इस प्रकार का संबंध स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक होता है।

57. मान लीजिए कि A = {0, 1} तथा **N** प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, तो $f(2n-1) = 0$, $f(2n) = 1$, $n \in \mathbf{N}$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण $f : \mathbf{N} \to$ A आच्छादक है।

58. समुच्चय A में, R = {{1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3)} प्रकार से परिभाषित संबंध R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

59. फलनों का संयोजन क्रम-विनिमेय होता है।

60. फलनों का संयोजन साहचर्य होता है।

61. प्रत्येक फलन व्युत्क्रमणीय होता है।

62. किसी समुच्चय में किसी द्वि-आधारी संक्रिया का तत्समक अवयव सदैव होता है।

अध्याय 2

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

2.1 समग्र अवलोकन (Overview)

2.1.1 प्रतिलोम फलन

फलन 'f' के प्रतिलोम का अस्तित्व केवल तभी होता है जब फलन एकैकी तथा आच्छादक हो अर्थात् एकैकी आच्छादी हो क्योंकि त्रिकोणमितीय फलन बहुएक संगति (many-one) फलन होते हैं इसलिए हम उनके प्रांतों तथा परिसरों को इस प्रकार प्रतिबंधित करते हैं कि वे एकैकी तथा आच्छादक हो जाए और फिर हम उनका प्रतिलोम ज्ञात करते हैं। प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के प्रांत तथा परिसर (मुख्य मान शाखा) नीचे दिए गए हैं।

फलन	**प्रांत**	**परिसर (मुख्य मान शाखा)**
$y = \sin^{-1}x$	$[-1,1]$	$\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1}x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$y = \text{cosec}^{-1}x$	$\mathbf{R}-(-1,1)$	$\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\ -\{0\}$
$y = \sec^{-1}x$	$\mathbf{R}-(-1,1)$	$[0,\pi]-\ \frac{\pi}{2}$
$y = \tan^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}$
$y = \cot^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$(0,\pi)$

> **☛ टिप्पणी**
>
> (i) $\sin^{-1}x$ से $(\sin x)^{-1}$ की भ्रांति नहीं होनी चाहिए। वास्तव में $\sin^{-1}x$ एक कोंण है जिसके sine का मान x है। यही तथ्य अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के लिए भी सत्य है।
>
> (ii) θ के सबसे कम (न्यूनतम) संख्यात्मक मान चाहे वह धनात्मक हो या ऋणात्मक हो, को फलन का मुख्य मान कहते हैं।
>
> (iii) जब कभी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन की किसी विशेष शाखा का उल्लेख न हो तो हमारा तात्पर्य मुख्य शाखा से होता है। प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का वह मान जो उसकी मुख्य शाखा के परिसर में स्थित होता है उसे मुख्य मान कहते हैं।

2.1.2 *त्रिकोणमितीय फलनों का आलेख*

किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का आलेख मूल फलन के आलेख में x तथा y-अक्षों का परस्पर विनिमय करके प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात्, यदि (a, b) फलन के आलेख में एक बिंदु है तो (b, a) प्रतिलोम फलन के ग्राफ का संगत बिंदु हो जाता है।

यह दिखाया जा सकता है कि प्रतिलोम फलन के आलेख, रेखा $y = x$ के परित: संगत मूल फलन के आलेख को दर्पण प्रतिबिंब (mirror image) अर्थात् परावर्तन (reflection) के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

2.1.3 *प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्म*

1. $\sin^{-1}(\sin x) = x \quad : \quad x \quad \frac{-}{2}, \frac{}{2}$

$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad : \quad x \quad [0, \ ]$

$\tan^{-1}(\tan x) = x \quad : \quad x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\cot^{-1}(\cot x) = x \quad : \quad x \in (0, \pi)$

$\sec^{-1}(\sec x) = x \quad : \quad x \quad [0, \pi] - \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec} x) = x \quad : \quad x \quad \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \{0\}$

2. $\sin(\sin^{-1} x) = x \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$\tan(\tan^{-1} x) = x \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$\cot(\cot^{-1} x) = x \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$\sec(\sec^{-1} x) = x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

$\text{cosec}(\text{cosec}^{-1} x) = x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

3. $\sin^{-1} \dfrac{1}{x} \quad \text{cosec}^{-1} x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

$\cos^{-1} \dfrac{1}{x} \quad \sec^{-1} x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

$\tan^{-1} \dfrac{1}{x} \quad \cot^{-1} x$: $x > 0$

$= -\pi + \cot^{-1} x$: $x < 0$

4. $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$: $x \in [-1,1]$

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$: $x \in [-1,1]$

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$: $x \in \mathbf{R}$

$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$: $x \in \mathbf{R}$

$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

$\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1} x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

5. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$: $x \in [-1,1]$

$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$: $x \in \mathbf{R}$

$\sec^{-1} x + \text{cosec}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$: $x \in \mathbf{R} - [-1,1]$

6. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x \quad y}{1 - xy}$: $xy < 1$

$\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\dfrac{x - y}{1 + xy}\right); xy > -1$

7. $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{2x}{1 \quad x^2}$: $-1 \leq x \leq 1$

$2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1 - x^2}{1 \quad x^2}$: $x \geq 0$

$2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1 - x^2}$: $-1 < x < 1$

2.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ के लिए $\cos^{-1}x$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

हल यदि $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \theta$, तब $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

हम यहाँ मुख्य शाखा पर विचार कर रहे हैं इसलिए $\theta \in [0, \pi]$. पुनः $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ से हम जान गए कि θ प्रथम चतुर्थांश में है इसलिए $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

उदाहरण 2 $\tan^{-1}\sin\frac{-\pi}{2}$ को परिकलित कीजिए।

हल $\tan^{-1}\sin\frac{-\pi}{2} = \tan^{-1}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

उदाहरण 3 $\cos^{-1}\cos\frac{13\pi}{6}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\cos^{-1}\cos\frac{13\pi}{6} = \cos^{-1}\left(\cos(2\pi+\frac{\pi}{6})\right) = \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{\pi}{6}.$$

उदाहरण 4 $\tan^{-1}\tan\frac{9\pi}{8}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan^{-1}\tan\frac{9\pi}{8} = \tan^{-1}\tan\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{\pi}{8}$$

उदाहरण 5 $\tan(\tan^{-1}(-4))$ को परिकलित कीजिए।

हल क्योंकि $x \in \mathbf{R}$ के सभी मानों के लिए $\tan(\tan^{-1}x) = x$, है इसलिए $\tan(\tan^{-1}(-4) = -4$.

उदाहरण 6 $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2) = \tan^{-1}\sqrt{3} - [\pi - \sec^{-1}2]$

$$= \frac{\pi}{3} - \pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

उदाहरण 7 $\sin^{-1} \cos \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin^{-1} \cos \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin^{-1} \cos \frac{\pi}{3} = \sin^{-1} \frac{1}{2} \quad \frac{\pi}{6}.$

उदाहरण 8 सिद्ध कीजिए कि $\tan(\cot^{-1}x) = \cot(\tan^{-1}x)$. कारण सहित बताइए कि क्या यह x के सभी मानों के लिए सत्य है।

हल मान लीजिए $\cot^{-1}x = \theta$. तब $\cot\theta = x$

या, $\tan \frac{\pi}{2} - \theta = x \Rightarrow \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta$ या $\tan(\cot^{-1}x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right) = \cot(\tan^{-1}x)$

इसलिए $\tan(\cot^{-1}x) = \tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \cot^{-1}x\right) = \cot(\tan^{-1}x)$

यह समता x के सभी मानों के लिए सत्य है क्योंकि $x \in \mathbf{R}$ के लिए $\tan^{-1}x$ तथा $\cot^{-1}x$ सत्य है।

उदाहरण 9 $\sec\left(\tan^{-1}\frac{y}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $\tan^{-1}\frac{y}{2} = \theta$, जहाँ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. इसलिए, $\tan\theta = \frac{y}{2}$,

जिससे $\sec\theta = \frac{\sqrt{4 \quad y^2}}{2}$ प्राप्त होता है।

इसलिए, $\sec\left(\tan^{-1}\frac{y}{2}\right) = \sec\theta = \frac{\sqrt{4+y^2}}{2}$.

उदाहरण 10 $\tan(\cos^{-1}x)$ का मान ज्ञात कीजिए और फिर $\tan\ \cos^{-1}\dfrac{8}{17}$ परिकलित कीजिए।

हल मान लीजिए $\cos^{-1}x = \theta$, तब $\cos\theta = x$, जहाँ $\theta \in [0,\pi]$

इसलिए $$\tan(\cos^{-1}x) = \tan\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

अत: $$\tan\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right) = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$$

उदाहरण 11 $\sin\ 2\cot^{-1}\dfrac{-5}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $\cot^{-1}\left(\dfrac{-5}{12}\right) = y$. तब $\cot y = \dfrac{-5}{12}$

अब $$\sin\ 2\cot^{-1}\frac{-5}{12} = \sin 2y$$

$$= 2\sin y\cos y \quad = 2\ \frac{12}{13}\ \frac{-5}{13} \qquad \left[\text{क्योंकि } \cot y<0, \text{ so } y\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right]$$

$$\frac{-120}{169}$$

उदाहरण 12 $\cos\ \sin^{-1}\dfrac{1}{4}\ \ \sec^{-1}\dfrac{4}{3}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल $$\cos\ \sin^{-1}\frac{1}{4}\ \ \sec^{-1}\frac{4}{3} = \cos\left[\sin^{-1}\frac{1}{4}+\cos^{-1}\frac{3}{4}\right]$$

$$= \cos\ \sin^{-1}\frac{1}{4}\ \cos\ \cos^{-1}\frac{3}{4} - \sin\ \sin^{-1}\frac{1}{4}\ \sin\ \cos^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{1-\ \frac{1}{4}\ ^2} - \frac{1}{4}\sqrt{1-\ \frac{3}{4}\ ^2}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \frac{3\sqrt{15} - \sqrt{7}}{16}$$

दीर्घ उत्तरीय उत्तर (L.A.)

उदाहरण 13 सिद्ध कीजिए कि $2\sin^{-1}\frac{3}{5} - \tan^{-1}\frac{17}{31} = \frac{\pi}{4}$

हल मान लीजिए $\sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta$, तब $\sin\theta = \frac{3}{5}$, जहाँ $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

इस प्रकार $\tan\theta = \frac{3}{4}$, जिससे $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$ प्राप्त होता है।

इसलिए $$2\sin^{-1}\frac{3}{5} - \tan^{-1}\frac{17}{31}$$

$$= 2\theta - \tan^{-1}\frac{17}{31} \quad = 2\tan^{-1}\frac{3}{4} - \tan^{-1}\frac{17}{31}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2.\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}\right) - \tan^{-1}\frac{17}{31} = \tan^{-1}\frac{24}{7} - \tan^{-1}\frac{17}{31}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{24}{7}-\frac{17}{31}}{1+\frac{24}{7}.\frac{17}{31}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि

$$\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18 = \cot^{-1}3$$

हल दिया है

$$\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{18} \quad (\text{क्योंकि } x > 0 \text{ के लिए } \cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x})$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{18} \qquad \left(\text{क्योंकि } x \,.\, y = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8} < 1\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{11} + \tan^{-1}\frac{1}{18} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{18}}{1-\frac{3}{11}\times\frac{1}{18}}\right) \qquad (\text{क्योंकि } xy < 1)$$

$$= \tan^{-1}\frac{65}{195} \qquad = \tan^{-1}\frac{1}{3} \qquad = \cot^{-1} 3$$

उदाहरण 15 $\tan 1$ तथा $\tan^{-1} 1$ में से कौन सा बड़ा है?

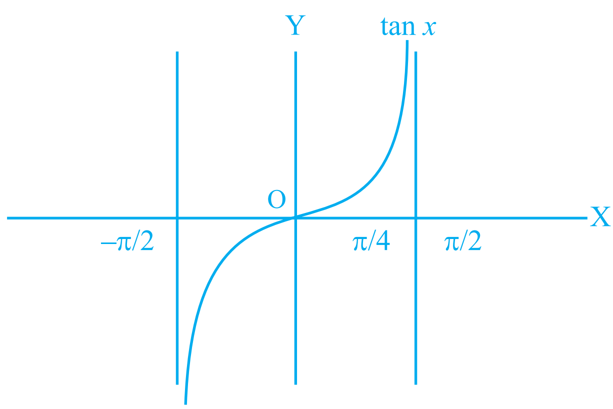
हल आकृति 2.1 से हम देखते हैं कि अंतराल $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ में $\tan x$ वर्धमान फलन है। क्योंकि

$$1 > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 1 > \tan\frac{\pi}{4}$$

अतः, $\tan 1 > 1$

$\Rightarrow$ $\tan 1 > 1 > \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ $\tan 1 > 1 > \tan^{-1}(1).$



आकृति 2.1

उदाहरण 16 $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)+\cos(\tan^{-1}\sqrt{3})$ का मान ज्ञात कीजिए

हल माना $\tan^{-1}\frac{2}{3} = x$ और $\tan^{-1}\sqrt{3} = y$ इसलिए $\tan x = \frac{2}{3}$ और $\tan y = \sqrt{3}$

अतः, $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)+\cos(\tan^{-1}\sqrt{3})$

$$= \sin(2x) + \cos y$$

$$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}} \quad = \frac{2.\frac{2}{3}}{1+\frac{4}{9}} + \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{12}{13} + \frac{1}{2} = \frac{37}{26}.$$

उदाहरण 17 $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x, x>0$ को x के लिए हल कीजिए

हल दिए गए समीकरण से, $2\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \tan^{-1}x$

$$\Rightarrow \quad 2\left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}x\right] = \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\tan^{-1}x \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

उदाहरण 18 x के वे मान ज्ञात कीजिए जो समीकरण $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x$ को संतुष्ट करते हैं।

हल दिए गए समीकरण से हमें प्राप्त होता है कि

$$\sin\left[\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x)\right] = \sin(\cos^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \sin(\sin^{-1}x)\cos(\sin^{-1}(1-x)) + \cos(\sin^{-1}x)\sin(\sin^{-1}(1-x)) = \sin(\cos^{-1}x)$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1-(1-x)^2} + (1-x)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{1-x^2}\,(1-x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x\left(\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \qquad \text{या} \qquad 2x - x^2 = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow x = 0 \qquad \text{या} \qquad x = \frac{1}{2}.$$

उदाहरण 19 समीकरण $\sin^{-1}6x + \sin^{-1} 6\sqrt{3}\, x = -\dfrac{\pi}{2}$ को हल कीजिए।

हल दिए गए समीकरण को $\sin^{-1} 6x = -\dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1} 6\sqrt{3}\, x$ के रूप में लिख सकते हैं।

$$\Rightarrow \quad \sin (\sin^{-1} 6x) = \sin \left(-\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} 6\sqrt{3}\, x\right)$$

$$\Rightarrow \quad 6x = -\cos (\sin^{-1} 6\sqrt{3}\, x)$$

$$\Rightarrow \quad 6x = -\sqrt{1-108x^2}$$

वर्ग करने पर प्राप्त होता है $36x^2 = 1 - 108x^2$

$$\Rightarrow \quad 144x^2 = 1 \qquad \Rightarrow x = \pm \frac{1}{12}$$

ध्यान दीजिए कि केवल $x = -\dfrac{1}{12}$ ही समीकरण का हल है क्योंकि $x = \dfrac{1}{12}$ इसे संतुष्ट नहीं करता है।

उदाहरण 20 दर्शाइए कि

$$2 \tan^{-1} \left\{\tan\frac{\alpha}{2} . \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \sin\beta}\right)$$

हल $$\text{L.H.S.} = \tan^{-1}\left[\frac{2\tan\frac{\alpha}{2} . \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}\right] \qquad \left(\text{क्योंकि } 2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\left(\dfrac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}\right)}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\left(\dfrac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1-\tan^2\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{\beta}{2}\right)^2-\tan^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\tan\frac{\beta}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\left(1-\tan^2\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1+\tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)+2\tan\frac{\beta}{2}\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\quad\dfrac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\sin\beta}\right) \quad = \text{R.H.S.}$$

बहुविकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.)

प्रश्न 21 से 41 तक प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए-

उदाहरण 21 निम्न में से कौन सा $\tan^{-1}$ की मुख्य मान शाखा है?

(A) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (C) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ (D) $(0, \pi)$

हल सही उत्तर (A) है।

उदाहरण 22 $\sec^{-1}$ की मुख्य मान शाखा है।

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$ (B) $[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (C) $(0, \pi)$ (D) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

हल सही उत्तर (B) है।

उदाहरण 23 मुख्य मान शाखा के अतिरिक्त $\cos^{-1}$ की एक अन्य शाखा है

(A) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (B) $[\pi, 2\pi]-\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ (C) $(0, \pi)$ (D) $[2\pi, 3\pi]$

हल सही उत्तर (D) है।

उदाहरण 24 $\sin^{-1}\left(\cos\left(\frac{43\pi}{5}\right)\right)$ का मान है

(A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{-7\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{10}$ (D) $-\frac{\pi}{10}$

हल सही उत्तर (D) है। क्योंकि $\sin^{-1}\left(\cos\frac{40\pi+3\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\cos\left(8\pi+\frac{3\pi}{5}\right)$

$$= \sin^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = -\frac{\pi}{10}.$$

उदाहरण 25 व्यंजक $\cos^{-1}[\cos(-680°)]$ का मान है

(A) $\frac{2\pi}{9}$ (B) $\frac{-2\pi}{9}$ (C) $\frac{34\pi}{9}$ (D) $\frac{\pi}{9}$

हल सही उत्तर (A) है क्योंकि $\cos^{-1}(\cos(680°)) = \cos^{-1}[\cos(720° - 40°)]$

$$= \cos^{-1}[\cos(40°)] = 40° = \frac{2\pi}{9}.$$

उदाहरण 26 $\cot(\sin^{-1}x)$ का मान है

(A) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (B) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

हल सही उत्तर (D) है। मान लीजिए $\sin^{-1} x = \theta$, तब $\sin\theta = x$

$$\Rightarrow \qquad \text{cosec } \theta = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \text{cosec}^2\theta = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \cot\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

उदाहरण 27 यदि किसी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $\tan^{-1}x = \frac{\pi}{10}$ है तो $\cot^{-1}x$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{2\pi}{5}$ (C) $\frac{3\pi}{5}$ (D) $\frac{4\pi}{5}$

हल सही उत्तर (B) है। हम जानते हैं कि $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ इसलिए $\cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$

$$\Rightarrow \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}.$$

उदाहरण 28 $\sin^{-1} 2x$ का प्रांत है

(A) $[0, 1]$ (B) $[-1, 1]$ (C) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (D) $[-2, 2]$

हल सही उत्तर (B) है। मान लीजिए $\sin^{-1}2x = \theta$ या $2x = \sin\theta$.

अब $-1 \le \sin\theta \le 1$, अर्थात् $-1 \le 2x \le 1$ जिससे $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 29 $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान है

(A) $-\frac{2\pi}{3}$ (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{3}$

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि

$$\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

उदाहरण 30 $(\sin^{-1}x)^2 + (\cos^{-1}x)^2$ का क्रमशः अधिकतम तथा न्यूनतम मान है

(A) $\frac{5\pi^2}{4}$ तथा $\frac{\pi^2}{8}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ तथा $\frac{-\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi^2}{4}$ तथा $\frac{-\pi^2}{4}$ (D) $\frac{\pi^2}{4}$ तथा 0

हल सही उत्तर (A) है। हम जानते हैं कि

$$(\sin^{-1}x)^2 + (\cos^{-1}x)^2 = (\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)^2 - 2\sin^{-1}x\ \cos^{-1}x$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\sin^{-1}x\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \pi\sin^{-1}x + 2\left(\sin^{-1}x\right)^2$$

$$= 2\left[\left(\sin^{-1}x\right)^2 - \frac{\pi}{2}\sin^{-1}x + \frac{\pi^2}{8}\right]$$

$$= 2\left[\left(\sin^{-1}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}\right].$$

इस प्रकार, न्यूनतम मान $2\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$ अर्थात् $\frac{\pi^2}{8}$ है तथा अधिकतम मान $2\left[\left(\frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}\right]$, अर्थात् $\frac{5\pi^2}{4}$ है।

उदाहरण 31 यदि $\theta = \sin^{-1}(\sin(-600°))$, तब θ का मान है

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{-2\pi}{3}$

हल सही उत्तर (A) है क्योंकि

$$\sin^{-1}\sin\left(-600 \times \frac{\pi}{180}\right) = \sin^{-1}\sin\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left[-\sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

उदाहरण 32 फलन $y = \sin^{-1}(-x^2)$ का प्रांत है

(A) $[0, 1]$ (B) $(0, 1)$ (C) $[-1, 1]$ (D) ϕ

हल सही उत्तर (C) है क्योंकि $y = \sin^{-1}(-x^2) \Rightarrow \sin y = -x^2$

अर्थात् $-1 \le -x^2 \le 1$ (क्योंकि $-1 \le \sin y \le 1$)

$\Rightarrow 1 \ge x^2 \ge -1$

$\Rightarrow 0 \le x^2 \le 1$

$\Rightarrow |x| \le 1$ या $-1 \le x \le 1$

उदाहरण 33 $y = \cos^{-1}(x^2 - 4)$ का प्रांत है

(A) $[3, 5]$ (B) $[0, \pi]$

(C) $\left[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right] \cap \left[\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right]$ (D) $\left[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$

हल सही उत्तर (D) है क्योंकि $y = \cos^{-1}(x^2 - 4) \Rightarrow \cos y = x^2 - 4$

अर्थात् $-1 \le x^2 - 4 \le 1$ (क्योंकि $-1 \le \cos y \le 1$)

$\Rightarrow 3 \le x^2 \le 5$

$\Rightarrow \sqrt{3} \le |x| \le \sqrt{5}$

$\Rightarrow x \in \left[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$

उदाहरण 34 $f(x) = \sin^{-1}x + \cos x$ द्वारा परिभाषित फलन का प्रांत है

(A) $[-1, 1]$ (B) $[-1, \pi + 1]$ (C) $(-\infty, \infty)$ (D) ϕ

हल सही उत्तर (A) है। क्योंकि फलन cos का प्रांत **R** है तथा $\sin^{-1}$ का प्रांत $[-1, 1]$ है। इसलिए

$f(x) = \cos x + \sin^{-1}x$ का प्रांत $\mathbf{R} \cap [-1,1]$, अर्थात् $[-1, 1]$ है।

उदाहरण 35 $\sin(2\sin^{-1}(\cdot 6))$ का मान है

(A) $\cdot 48$ (B) $\cdot 96$ (C) $1\cdot 2$ (D) $\sin 1\cdot 2$

हल सही उत्तर (A) है। यदि $\sin^{-1}(0\cdot 6) = \theta$, तब $\sin\theta = \cdot 6$.

अब $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\cdot 6)(\cdot 8) = \cdot 96$

उदाहरण 36 यदि $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$, तब $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 0 (D) $\frac{2\pi}{3}$

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ है इसलिए

$$\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1} x\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1} y\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2}.$$

उदाहरण 37 $\tan\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$ का मान है

(A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{8}{19}$ (C) $\frac{19}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

हल सही उत्तर (A) है। क्योंकि $\tan\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}\right) = \tan\left(\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$

$$= \tan\tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}}\right)=\tan\tan^{-1}\left(\frac{19}{8}\right)=\frac{19}{8}.$$

उदाहरण 38 व्यंजक $\sin [\cot^{-1} (\cos (\tan^{-1} 1))]$ का मान है

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

हल सही उत्तर (D) है। क्योंकि

$$\sin [\cot^{-1} (\cos \frac{\pi}{4})] = \sin [\cot^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}]= \sin\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}\right]=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

उदाहरण 39 समीकरण $\tan^{-1}x - \cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(A) का काई हल नहीं है (B) का केवल एक मात्र हल है

(C) के अनंत हल हैं (D) के दो हल हैं

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि

$$\tan^{-1}x - \cot^{-1}x = \frac{\pi}{6} \text{ तथा } \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}.$$

इनको जोड़ने पर हमें $2\tan^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$ प्राप्त होता है

इसलिए $\Rightarrow \tan^{-1}x = \frac{\pi}{3}$ अर्थात् $x = \sqrt{3}$.

उदाहरण 40 यदि $\alpha \leq 2\sin^{-1}x + \cos^{-1}x \leq \beta$, तब

(A) $\alpha = \frac{-\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}$ (B) $\alpha = 0, \beta = \pi$

(C) $\alpha = \frac{-\pi}{2}, \beta = \frac{3\pi}{2}$ (D) $\alpha = 0, \beta = 2\pi$

हल सही उत्तर (B) है। दिया गया है कि $\frac{-\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin^{-1}x + (\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) \leq \pi$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2\sin^{-1}x + \cos^{-1}x \leq \pi$$

उदाहरण 41 $\tan^2(\sec^{-1}2) + \cot^2(\text{cosec}^{-1}3)$ का मान है

(A) 5 (B) 11 (C) 13 (D) 15

हल सही उत्तर (B) है।

$$\tan^2(\sec^{-1}2) + \cot^2(\text{cosec}^{-1}3) = \sec^2(\sec^{-1}2) - 1 + \text{cosec}^2(\text{cosec}^{-1}3) - 1$$

$$= 2^2 \times 1 + 3^2 - 2 = 11.$$

2.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{5\pi}{6}\right)+\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$ का मान निकालिए।

2. $\cos \quad \cos^{-1} \quad \frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{\quad}{6}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि $\cot \quad \frac{\quad}{4} - 2\cot^{-1}3 \quad 7$.

4. $\tan^{-1} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cot^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \tan^{-1} \quad \sin \quad \frac{\quad}{2}$ का मान निकालिए।

5. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right)$ का मान निकालिए।

6. दर्शाइए कि $2\tan^{-1}(-3) = \frac{\quad}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$.

7. समीकरण $\tan^{-1}\sqrt{x(x+1)}+\sin^{-1}\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\pi}{2}$. के वास्तविक हल ज्ञात कीजिए।

8. व्यंजक $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\tan^{-1}2\sqrt{2}\right)$ का मान निकालिए।

9. यदि $2\tan^{-1}(\cos\theta) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec}\theta)$, तो दिखाइए कि $\theta = \frac{\pi}{4}$.

10. दर्शाइए कि $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)=\sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$.

11. समीकरण $\cos\left(\tan^{-1}x\right)=\sin\left(\cot^{-1}\frac{3}{4}\right)$ को हल कीजिए

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

12. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1\quad x^2}\quad\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1\quad x^2}-\sqrt{1-x^2}}\quad\dfrac{\ }{4}\quad\dfrac{1}{2}\cos^{-1}x^2$.

13. $\cos^{-1}\quad\dfrac{3}{5}\cos x\quad\dfrac{4}{5}\sin x$, जहाँ $x\in\quad\dfrac{-3}{4},\dfrac{\ }{4}$, को सरलतम रूप में लिखिए।

14. सिद्ध कीजिए कि $\sin^{-1}\dfrac{8}{17}\quad\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\quad\sin^{-1}\dfrac{77}{85}$.

15. दर्शाइए कि $\sin^{-1}\dfrac{5}{13}\quad\cos^{-1}\dfrac{3}{5}\quad\tan^{-1}\dfrac{63}{16}$.

16. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\dfrac{1}{4}+\tan^{-1}\dfrac{2}{9}=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

17. $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}-\tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ का मान ज्ञात कीजिए।

18. दर्शाइए कि $\tan\quad\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\quad\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$ तथा इसका भी औचित्य बताइए कि दूसरा मान

$\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ को क्यों नहीं लिया गया है।

19. यदि $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n$ एक समांतर श्रेढ़ी में हैं जिसका सार्व अंतर (common difference) d है तो निम्नलिखित व्यंजक का मान निकालिए।

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_3a_4}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_{n-1}a_n}\right)\right].$$

बहुविकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.)

प्रश्न 20 से 37 तक प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए–

20. निम्न में से कौन सा $\cos^{-1}x$ की मुख्य शाखा है?

(A) $\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ (B) $(0,\pi)$ (C) $[0,\pi]$ (D) $(0,\pi)-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

21. निम्नलिखित में से कौन सा $\operatorname{cosec}^{-1}x$ की मुख्य शाखा है?

(A) $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (C) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

22. यदि $3\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi$, तो x बराबर है

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) $\frac{1}{2}$

23. $\sin^{-1}\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$ का मान है

(A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{-7\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{10}$ (D) $\frac{-\pi}{10}$

24. फलन $\cos^{-1}(2x - 1)$ का प्रांत है

(A) [0, 1] (B) [–1, 1] (C) (–1, 1) (D) [0, π]

25. $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{x-1}$ द्वारा परिभाषित फलन का प्रांत है

(A) [1, 2] (B) [–1, 1] (C) [0, 1] (D) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{5}+\cos^{-1}x\right)=0$, तो x का मान है

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) 0 (D) 1

27. $\sin(2\tan^{-1}(.75))$ का मान है

(A) ·75 (B) 1·5 (C) ·96 (D) sin 1·5

28. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{2}$ (C) $\frac{5\pi}{2}$ (D) $\frac{7\pi}{2}$

29. व्यंजक $2\sec^{-1} 2 + \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{7\pi}{6}$ (D) 1

30. यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{4\pi}{5}$, तो $\cot^{-1} x + \cot^{-1} y$ बराबर है

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{2\pi}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) π

31. यदि $\sin^{-1} \frac{2a}{1\ \ a^2}\quad \cos^{-1} \frac{1-a^2}{1\ \ a^2}\quad \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$, जहाँ $a, x \in]0, 1$, तब x का मान बराबर है

(A) 0 (B) $\frac{a}{2}$ (C) a (D) $\frac{2a}{1-a^2}$

32. $\cot \quad \cos^{-1} \frac{7}{25}$ का मान है

(A) $\frac{25}{24}$ (B) $\frac{25}{7}$ (C) $\frac{24}{25}$ (D) $\frac{7}{24}$

33. व्यंजक $\tan \quad \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}$ का मान है

(A) $2 \quad \sqrt{5}$ (B) $\sqrt{5}-2$ (C) $\frac{\sqrt{5} \quad 2}{2}$ (D) $5 \quad \sqrt{2}$

[**संकेत** : $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ प्रयुक्त करें]

34. यदि $|x| \leq \ 1$, तब $2\tan^{-1} x + \sin^{-1} \frac{2x}{1\ \ x^2}$ बराबर है

(A) $4 \tan^{-1} x$ (B) 0 (C) $\frac{\ }{2}$ (D) π

35. यदि $\cos^{-1} \alpha + \cos^{-1} \beta + \cos^{-1} \gamma = 3\pi$, तब $\alpha(\beta + \gamma) + \beta(\gamma + \alpha) + \gamma(\alpha + \beta)$ बराबर है

(A) 0 (B) 1 (C) 6 (D) 12

36. समीकरण $\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2}\cos^{-1}(\cos x)$ in $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ के वास्तविक हलों की संख्या है

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) अनंत

37. यदि $\cos^{-1}x > \sin^{-1}x$, हो तो

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}<x\leq 1$ (B) $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $-1\leq x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $x > 0$

प्रश्न 38 से 48 तक रिक्त स्थान भरिए –

38. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ की मुख्य शाखा __________ है।

39. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)$ का मान __________है।

40. यदि $\cos(\tan^{-1}x + \cot^{-1}\sqrt{3}) = 0$, तब x का मान __________ है।

41. $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ के मानों का समुच्चय __________ है।

42. $\tan^{-1}\sqrt{3}$ का मुख्य मान __________है।

43. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{14\pi}{3}\right)$ का मान __________ है।

44. $\cos(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)$, $|x| \leq 1$ का मान __________ है।

45. व्यंजक $\tan\left(\frac{\sin^{-1}x+\cos^{-1}x}{2}\right)$,जहाँ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है, का मान __________ है।

46. यदि x के सभी मानों के लिए $y = 2\tan^{-1}x + \sin^{-1}\frac{2x}{1\;\; x^2}$ तब ____$< y <$____.

47. परिणाम $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ तभी सत्य है जब xy _____ है।

48. सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $\cot^{-1}(-x)$ का मान $\cot^{-1}x$ के पद में _______ है।

प्रश्न 49 से 55 तक प्रत्येक में दिए गए कथन को बताइए कि वह सत्य है या असत्य–

49. प्रत्येक त्रिकोणमितीय फलन का उनके संगत प्रांतों में प्रतिलोम फलन का अस्तित्व होता है।

50. व्यंजक $(\cos^{-1} x)^2$ का मान $\sec^2 x$ के बराबर है।

51. त्रिकोणमितीय फलनों के प्रांतों का उनकी किसी भी शाखा (आवश्यक नहीं कि मुख्य शाखा हो) में प्रतिबंधित किया जा सकता है ताकि उनका प्रतिलोम फलन प्राप्त हो सके।

52. θ कोण का न्यूनतम संख्यात्मक मान, चाहे धनात्मक हो या ऋणात्मक, को त्रिकोणमितीय फलन का मुख्य मान कहते हैं।

53. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का आलेख उनके संगत त्रिकोणमितीय फलन के आलेख में x तथा y अक्ष का परस्पर विनिमय करके प्राप्त किया जा सकता है।

54. n का वह न्यूनतम मान जिसके लिए $\tan^{-1} \frac{n}{\pi} > \frac{\pi}{4}, n \in \mathbf{N}$, के लिए सत्य हो, वह 5 है।

55. $\sin^{-1}\left[\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{3}$ है।

अध्याय 3

आव्यूह

3.1 समग्र अवलोकन (Overview)

3.1.1 आव्यूह संख्याओं (या फलनों) का एक आयताकार क्रमित क्रम विन्यास है। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{matrix} x & 4 & 3 \\ 4 & 3 & x \\ 3 & x & 4 \end{matrix}$$

संख्याओं (या फलनों)आव्यूह के अवयव या प्रविष्ठियाँ कहते हैं।

आव्यूह के अवयवों की क्षैतिज़ रेखाएँ, आव्यूह की पंक्तियाँ (Rows) तथा ऊर्ध्व रेखाएँ आव्यूह के स्तंभ (Columns) कहलाते हैं।

3.1.2 *आव्यूह की कोटि (Order of a matrix)*

m पंक्तियों तथा n स्तंभों वाले किसी आव्यूह को $m \times n$ कोटि (Order) का आव्यूह अथवा केवल $m \times n$ आव्यूह कहते हैं।

उपर्युक्त उदाहरण में, A एक 3×3 कोटि का आव्यूह अर्थात् 3×3 आव्यूह है।

व्यापक रूप में एक $m \times n$ आव्यूह का निम्नलिखित आयताकार क्रम विन्यास होता है:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \text{ तथा } i,\ j \in \mathbf{N}.$$

अवयव a_{ij} वह अवयव है जो i वीं पंक्ति और j वें स्तंभ में स्थित होता है तथा इसे A का (i, j)वाँ अवयव कहते हैं। $m \times n$ आव्यूह में अवयवों की संख्या mn होती है।

3.1.3 आव्यूह के प्रकार (Types of Matrices)

(i) एक आव्यूह, पंक्ति आव्यूह कहलाता है यदि उसमें केवल एक पंक्ति होती है।

(ii) एक आव्यूह, स्तंभ आव्यूह कहलाता है यदि उसमें केवल एक स्तंभ होता है।

(iii) एक आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के समान होती है, एक वर्ग आव्यूह (*Square matrix*) कहलाता है। अतः एक $m \times n$ आव्यूह, वर्ग आव्यूह कहलाता है यदि $m = n$ हो और उसे 'n' कोटि का वर्ग आव्यूह कहते हैं।

(iv) एक वर्ग आव्यूह $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ *विकर्ण आव्यूह* (*Diagonal matrix*) कहलाता है यदि विकर्ण के अतिरिक्त इसके सभी अन्य अवयव शून्य होते हैं अर्थात् एक आव्यूह $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ विकर्ण आव्यूह कहलाता है यदि $b_{ij} = 0$, जब $i \neq j$ हो।

(v) एक विकर्ण आव्यूह, अदिश आव्यूह (*Scalar matrix*) कहलाता है यदि इसके विकर्ण के अवयव समान होते हैं, अर्थात् एक वर्ग आव्यूह $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ अदिश आव्यूह कहलाता है यदि $b_{ij} = 0$, जब $i \neq j$, $b_{ij} = k$, जब $i = j$, जहाँ k कोई अचर है।

(vi) एक वर्ग आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव एक होते हैं तथा शेष अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं, तत्समक आव्यूह (*Identity matrix*) कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ एक तत्समक आव्यूह है यदि $a_{ij} = 1$, जब $i = j$ हो तथा $a_{ij} = 0$, जब $i \neq j$ हो।

(vii) एक आव्यूह, शून्य आव्यूह या रिक्त आव्यूह कहलाता है यदि इसके सभी अवयव शून्य हों। हम शून्य आव्यूह को O द्वारा निरूपित करते हैं।

(viii) दो आव्यूह $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$ समान कहलाते हैं यदि

(a) वे समान कोटि के हों, तथा

(b) A का प्रत्येक अवयव, B के संगत अवयव के समान हो, अर्थात्, i तथा j के सभी मानों के लिए $a_{ij} = b_{ij}$ हो।

3.1.4 आव्यूहों का योग (Addition of matrices)

दो आव्यूहों का योग तभी संभव है जब वे समान कोटि के हों।

3.1.5 एक आव्यूह का एक अदिश से गुणन (Multiplication of matrix by a scalar)

यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक आव्यूह है तथा k एक अदिश है तो kA एक ऐसा आव्यूह है जिसे A के प्रत्येक अवयव को k से गुणा करके प्राप्त किया जाता है, अर्थात्, $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$

3.1.6 *आव्यूह का ऋण आव्यूह* (*Negative of a matrix*)

किसी आव्यूह A का ऋण आव्यूह –A से निरूपित होता है। हम –A को (–1)A द्वारा परिभाषित करते हैं।

3.1.7 *आव्यूहों का गुणन* (*Multiplication of matrices*)

दो आव्यूहों A और B का गुणनफल तभी AB परिभाषित होता है जब A के स्तंभों की संख्या, B की पंक्तियों की संख्या के समान होती है।

मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]$, एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है और $B = [b_{jk}]$, एक $n \times p$ कोटि का आव्यूह है। तब A और B आव्यूहों का गुणनफल, एक $m \times p$ कोटि का आव्यूह C होता है। आव्यूह C का (i, k)वाँ अवयव c_{ik} प्राप्त करने के लिए हम A की iवीं पंक्ति और B के kवें स्तंभ को लेते हैं और फिर उनके अवयवों का क्रमानुसार गुणन करते हैं और फिर इन सभी गुणनफलनों का योगफल ज्ञात कर लेते हैं, अर्थात्

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + a_{i3}\, b_{3k} + \ldots + a_{in}\, b_{nk}$$

आव्यूह $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ A तथा B का गुणनफल है।

टिप्पणी

1. यदि AB परिभाषित है तब यह आवश्यक नहीं हैं कि BA भी परिभाषित हो।
2. यदि A और B क्रमशः $m \times n$ तथा $k \times l$, कोटि के आव्यूह हैं तब दोनों AB तथा BA तभी और केवल तभी परिभाषित होंगे जब $n = k$ तथा $l = m$ हो।
3. यदि AB और BA दोनों परिभाषित हैं तो यह आवश्यक नहीं है कि AB = BA हो।
4. यदि दो आव्यूहों का गुणनफल एक शून्य आव्यूह हो तो यह आवश्यक नहीं है कि उनमें से एक शून्य आव्यूह है।
5. समान कोटि के तीन A, B और C आव्यूहों के लिए यदि A = B, हो तब AC = BC होगा परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।
6. $A. A = A^2$, $A. A. A = A^3$, इत्यादि

3.1.8 *आव्यूह का परिवर्त* (*Transpose of a Matrix*)

1. यदि $A = [a_{ij}]$ एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है तो A की पंक्तियों तथा स्तंभों को परस्पर बदलने (*interchange*) से प्राप्त होने वाला आव्यूह A का परिवर्त कहलाता है।

   आव्यूह A के परिवर्त को A′ या (A^T) से निरूपित करते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ हो तो $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ होगा।

2. **आव्यूहों के परिवर्त के गुणधर्म (Properties of transpose of a matrix)**

उपयुक्त कोटि के किन्हीं A तथा B आव्यूहों के लिए

(i) $(A^T)^T = A$ (ii) $(kA)^T = kA^T$ (जहाँ k कोई अचर है)

(iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$ (iv) $(AB)^T = B^T A^T$

3.1.9 *समामित आव्यूह तथा विषम सममित आव्यूह (Symmetric Matrix and Skew Symmetric Matrix)*

(i) एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ सममित आव्यूह कहलाता है यदि $A^T = A$ हो, अर्थात्, i व j के प्रत्येक संभव मानों के लिए $a_{ij} = a_{ji}$ हो।

(ii) एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ विषम सममित आव्यूह कहलाता है यदि $A^T = -A$ हो, अर्थात्, i तथा j के प्रत्येक संभव मानों के लिए $a_{ji} = -a_{ij}$ हो।

टिप्पणी : किसी विषम सममित आव्यूह के विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं।

(iii) **प्रमेय 1:** वास्तविक अवयवों वाले किसी वर्ग आव्यूह A के लिए $A + A^T$ एक सममित आव्यूह है तथा $A - A^T$ एक विषम सममित आव्यूह है।

(iv) किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित तथा एक विषम सममित आव्यूहों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अर्थात्,

$$A = \frac{(A+A^T)}{2} + \frac{(A-A^T)}{2}$$

3.1.10 *व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrices)*

यदि A, कोटि $m \times m$, का एक वर्ग आव्यूह है और समान कोटि $m \times m$ का एक अन्य आव्यूह B का अस्तित्व इस प्रकार है कि $AB = BA = I$ है तो A को व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहते हैं तथा B को A का व्युत्क्रम आव्यूह कहते हैं और इसे A^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं।

टिप्पणी

1. किसी आयताकार आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह नहीं होता है क्योंकि गुणनफल AB तथा BA के परिभाषित और समान होने के लिए यह अनिवार्य है कि A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हों।
2. यदि आव्यूह B, आव्यूह A का व्युत्क्रम है तो आव्यूह A, आव्यूह B का व्युत्क्रम होता है।

3. (व्युत्क्रम आव्यूह की अद्वितीयता): किसी वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह, यदि उसका अस्तित्व है तो वह अद्वितीय होता है।

4. यदि A तथा B समान कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों तो $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ होता है।

3.1.11 *प्रारंभिक पंक्ति तथा स्तंभ संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा एक आव्यूह का व्युत्क्रम (Inverse of a matrix using elementary row or column operations)*

प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा A^{-1} ज्ञात करने के लिए, A = IA लिखिए और पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग A = IA पर तब तक करते रहिए जब तक I = BA नहीं मिल जाता है। इस प्रकार प्राप्त आव्यूह B, आव्यूह A का व्युत्क्रम होगा। इसी प्रकार यदि हम स्तंभ संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा A^{-1} ज्ञात करना चाहते हैं तो A = AI लिखिए और A = AI पर स्तंभ संक्रियाओं का प्रयोग तब तक करते रहिए जब तक हमें I = AB प्राप्त नहीं हो जाता है।

टिप्पणी : उस दशा में जब A = IA (या A = AI) पर एक या अधिक प्रारंभिक पंक्ति (या स्तंभ) संक्रियाओं के करने पर यदि बाएँ पक्ष के आव्यूह A की एक या अधिक पंक्तियों (या स्तंभों) के सभी अवयव शून्य हो जाते हैं तो A^{-1} का अस्तित्व नहीं होता है।

3.2 हल किए हुए उदाहरण (Solved Examples)

लघु उत्तरीय (Short Answer)

उदाहरण 1 आव्यूह $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ की रचना कीजिए जिसके अवयव a_{ij} इस प्रकार हैं कि $a_{ij} = e^{2ix}\sin jx$.

हल $i = 1, j = 1,$ के लिए, $a_{11} = e^{2x}\sin x$

$i = 1, j = 2,$ के लिए, $a_{12} = e^{2x}\sin 2x$

$i = 2, j = 1,$ के लिए, $a_{21} = e^{4x}\sin x$

$i = 2, j = 2,$ के लिए, $a_{22} = e^{4x}\sin 2x$

इस प्रकार, $$A = \begin{bmatrix} e^{2x}\sin x & e^{2x}\sin 2x \\ e^{4x}\sin x & e^{4x}\sin 2x \end{bmatrix}$$

उदाहरण 2 यदि $A = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}, B = \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{matrix}, C = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}, D = \begin{matrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{matrix}$, हों तो A + B, B + C, C + D और B + D योगफलों में कौन से योगफल परिभाषित हैं।

हल केवल B + D ही परिभाषित है क्योंकि केवल समान कोटि के आव्यूहों का ही योगफल संभव है।

उदाहरण 3 सिद्ध कीजिए यदि एक आव्यूह सममित तथा विषम सममित दोनों ही हो तो वह एक शून्य आव्यूह है।

हल माना आव्यूह $A = [a_{ij}]$ दोनों ही सममित तथा विषम सममित है।

क्योंकि A एक विषम सममित आव्यूह है इसलिए $A' = -A$

अतः i तथा j के सभी मानों के लिए $a_{ij} = -a_{ji}$. (1)

पुनः, क्योंकि A एक सममित आव्यूह है इसलिए $A' = A$

अतः i और j के सभी मानों के लिए $a_{ji} = a_{ij}$ (2)

इस प्रकार (1) तथा (2), से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$a_{ij} = -a_{ij}, \text{ सभी } i \text{ तथा } j \text{ के लिए} \quad \text{या} \quad 2a_{ij} = 0,$$

अर्थात्, सभी i और j के लिए $a_{ij} = 0$ है। अतः A एक शून्य आव्यूह है।

उदाहरण 4 यदि $\begin{bmatrix} 2x & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = O$ हो तो x का मान निकालिए।

हल दिया है

$$\begin{bmatrix} 2x & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = O \Rightarrow 2x \quad 9 \quad 4x \quad \begin{matrix} x \\ 8 \end{matrix} \quad = \quad 0$$

या $\quad [2x^2 - 9x + 32x] = [0] \quad \Rightarrow 2x^2 + 23x = 0$

या $\quad x(2x + 23) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, x = \dfrac{-23}{2}$

उदाहरण 5 यदि A एक 3×3 कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो दिखाइए कि किसी भी अदिश k (शून्येतर) के लिए kA व्युत्क्रमणीय है तथा $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$

हल हम जानते हैं कि

$$(kA)\ \frac{1}{k}A^{-1} \quad = \quad k.\ \frac{1}{k}\ \ (A.\ A^{-1}) = 1\ (I) = I$$

अतः (kA), आव्यूह $\frac{1}{k}A^{-1}$ का व्युत्क्रम है अथवा $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

दीर्घ उत्तरीय (L.A)

उदाहरण 6 आव्यूह A को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ $A = \begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix}$ है।

हल हम जानते हैं कि यदि

$$A = \begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix}\ ,\ \text{है तब}\ \ A' = \begin{matrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{matrix}$$

अतः,
$$\frac{A + A'}{2} = \frac{1}{2}\begin{matrix} 4 & 11 & 5 \\ 11 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 4 \end{matrix}$$

तथा
$$\frac{A - A'}{2} = \frac{1}{2}\begin{matrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{matrix}$$

इस प्रकार,

$$\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}=\begin{bmatrix} 2 & \frac{11}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{11}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{-7}{2} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}=A.$$

उदाहरण 7 यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि A, समीकरण $A^3-4A^2-3A+11I=O$ को संतुष्ट करता है।

हल

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+6+2 & 3+0+4 & 2-3+6 \\ 2+0-1 & 6+0-2 & 4+0-3 \\ 1+4+3 & 3+0+6 & 2-2+9 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

और,

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 9 & 14 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \\ 8 & 18 & 9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 27 & 0 & 10 \\ 3 & 0 & 2 \\ 24 & 0 & 18 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 18 & 7 & 15 \\ 2 & 4 & 3 \\ 16 & 9 & 27 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 28 & 37 & 26 \\ 10 & 5 & 1 \\ 35 & 42 & 34 \end{matrix}$$

अब $\qquad A^3 - 4A^2 - 3A + 11(I)$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 37 & 26 \\ 10 & 5 & 1 \\ 35 & 42 & 34 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28-36-3+11 & 37-28-9+0 & 26-20-6+0 \\ 10-4-6+0 & 5-16+0+11 & 1-4+3+0 \\ 35-32-3+0 & 42-36-6+0 & 34-36-9+11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} = O$$

उदाहरण 8 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि $A^2 - 4A + 7I = O$

इस परिणाम का प्रयोग करके A^5 का मान भी निकालिए।

हल यहाँ $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$,

$$-4A = \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \text{ तथा } 7I = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

इसलिए $A^2 - 4A + 7I = \begin{bmatrix} 1-8+7 & 12-12+0 \\ -4+4+0 & 1-8+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$

$\Rightarrow \qquad A^2 = 4A - 7\,I$

अब $\quad A^3 = A.A^2 = A\,(4A - 7\,I) = 4\,(4A - 7\,I) - 7A$

$= 16A - 28\,I - 7A = 9A - 28\,I$

पुनः $\quad A^5 = A^3A^2$

$= (9A - 28\,I)\,(4A - 7\,I)$

$= 36A^2 - 63A - 112A + 196\,I$

$= 36\,(4A - 7\,I) - 175A + 196\,I$

$= -31A - 56\,I$

$$= -31\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 56\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -118 & -93 \\ 31 & -118 \end{bmatrix}$$

बहु विकल्पीय प्रश्न (Objective Type Questions)

उदाहरण 9 से 12 तक प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

उदाहरण 9 यदि A और B समान कोटि के दो आव्यूह हैं तो (A + B) (A – B) बराबर है।

(A) $A^2 - B^2$ (B) $A^2 - BA - AB - B^2$

(C) $A^2 - B^2 + BA - AB$ (D) $A^2 - BA + B^2 + AB$

हल सही उत्तर (C) है। $(A + B)\,(A - B) = A\,(A - B) + B\,(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

उदाहरण 10 यदि $A = \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{matrix}$ और $B = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{matrix}$ तब

(A) केवल AB परिभाषित है। (B) केवल BA परिभाषित है।

(C) AB तथा BA दोनों परिभाषित हैं। (D) AB तथा BA दोनों ही परिभाषित नहीं हैं।

हल सही उत्तर (C) है। यहाँ $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ $B = [b_{ij}]_{3\times 2}$ है इसलिए AB तथा BA दोनों ही परिभाषित हैं।

उदाहरण 11 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ है

(A) अदिश आव्यूह (B) विकर्ण आव्यूह

(C) तत्समक आव्यूह (D) वर्ग आव्यूह

हल सही उत्तर (D) है।

उदाहरण 12 यदि A और B समान कोटि के दो सममित आव्यूह हैं तब $(AB' - BA')$ है एक

(A) विषम सममित आव्यूह (B) शून्य आव्यूह

(C) सममित आव्यूह (D) उपर्युक्त में से कोई नहीं

हल सही उत्तर (A) है क्योंकि

$$\begin{aligned}(AB' - BA')' &= (AB')' - (BA')' \\ &= (BA' - AB') \\ &= -(AB' - BA')\end{aligned}$$

उदाहरण 13 से 15 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान को भरिए–

उदाहरण 13 यदि A और B समान कोटि की दो विषम सममित आव्यूह हों तो AB एक सममित आव्यूह होगा यदि ________

हल AB = BA.

उदाहरण 14 यदि A और B समान कोटि के आव्यूह हैं तब $(3A - 2B)' =$ ________

हल $3A' - 2B'$

उदाहरण 15 आव्यूहों का योग तभी परिभाषित है जब प्रत्येक की कोटि ________ है।

हल समान

उदाहरण 16 से 19 तक प्रत्येक के लिए बताइए कि कथन सत्य है या असत्य है–

उदाहरण 16 यदि दो आव्यूह A और B समान कोटि के हैं तब $2A + B = B + 2A$.

हल सत्य

उदाहरण 17 आव्यूहों का व्यवकलन साहचर्य होता है।

हल असत्य

उदाहरण 18 एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह A के लिए $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

हल सत्य

उदाहरण 19 समान कोटि के किन्ही तीन आव्यूहों के लिए $AB = AC \Rightarrow B = C$

हल असत्य

3.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय (S.A.)

1. यदि एक आव्यूह में 28 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 13 अवयव हों तो कोटियाँ क्या होंगी?

2. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a & 1 & x \\ 2 & \sqrt{3} & x^2 - y \\ 0 & 5 & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$, तो

(i) A की कोटि लिखिए (ii) A के अवयवों की संख्या लिखिए।

(iii) A के अवयव a_{23}, a_{31}, a_{12} लिखिए।

3. एक $a_{2\times2}$ आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्न प्रकार से प्राप्त होते हैं

(i) $a_{ij} = \frac{(i \quad 2j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = | \ 2i \quad 3j|$

4. एक 3×2 आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव $a_{ij} = e^{i.x}\sin jx$ द्वारा दिए गए हैं।

5. यदि A = B हों तो a और b के मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$A = \begin{matrix} a \quad 4 & 3b \\ 8 & 6 \end{matrix}$ और $B = \begin{matrix} 2a \quad 2 & b^2 \quad 2 \\ 8 & b^2 \quad 5b \end{matrix}$ हैं।

6. यदि संभव हो तो A और B आव्यूहों का योग ज्ञात कीजिए जहाँ

$$A = \begin{matrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \text{ और } B = \begin{matrix} x & y & z \\ a & b & 6 \end{matrix} \text{ है।}$$

7. यदि $X = \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{matrix}$ और $Y = \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \end{matrix}$ हों तो ज्ञात कीजिए

(i) $X + Y$ (ii) $2X - 3Y$

(iii) एक आव्यूह Z जो इस प्रकार हो कि $X + Y + Z$ एक शून्य आव्यूह हो।

8. आव्यूह समीकरण

$$x\begin{bmatrix} 2x & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 8 & 5x \\ 4 & 4x \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} (x^2+8) & 24 \\ (10) & 6x \end{bmatrix}$$

को संतुष्ट करने वाले x के शून्येतर मान निकालिए।

9. यदि $A = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$ और $B = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ हैं तो दिखाइए कि $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

10. दर्शाइए कि यदि $\begin{matrix} 1 & x & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ x \end{matrix} = O$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

11. दर्शाइए कि $A = \begin{matrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$ समीकरण $A^2 - 3A - 7I = O$ को संतुष्ट करता है और इसके प्रयोग से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

12. आव्यूह समीकरण

$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} A \begin{matrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$ को संतुष्ट करने वाले आव्यूह A ज्ञात कीजिए।

13. यदि $\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \quad A = \begin{matrix} 4 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{matrix}$ हो तो A ज्ञात कीजिए।

14. यदि $A = \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}$ और $B = \begin{matrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $(BA)^2 \neq B^2A^2$.

15. यदि संभव हो तो BA और AB ज्ञात कीजिए जहाँ

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix} \quad \text{और } B = \begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \text{ है।}$$

16. एक उदाहरण की सहायता से दिखाइए कि जब आव्यूह $A \neq O, B \neq O$ हो तब भी $AB = O$ आव्यूह हो।

17. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{matrix}$ हों तो क्या $(AB)' = B'A'$ है?

18. x तथा y के लिए हल कीजिए

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -11 \end{bmatrix} = O$$

19. यदि X और Y, 2×2 कोटि के आव्यूह हों तो निम्नलिखित समीकरणों को X और Y के लिए हल कीजिए

$$2X + 3Y = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{matrix}, \quad 3X + 2Y = \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

20. यदि $A = \begin{matrix} 3 & 5 \end{matrix}$, $B = \begin{matrix} 7 & 3 \end{matrix}$ हों तो एक शून्येतर आव्यूह C ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार हो कि $AC = BC$.

21. आव्यूह A, B और C के ऐसे उदाहरण दीजिए जो इस प्रकार हों कि AB = BC, जहाँ A एक शून्येतर आव्यूह है परंतु B ≠ C है।

22. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, हों तो सत्यापित कीजिए :

(i) (AB) C = A (BC) (ii) A (B + C) = AB + AC.

23. यदि $P = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ और $Q = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ तो

सिद्ध कीजिए कि $PQ = \begin{bmatrix} xa & 0 & 0 \\ 0 & yb & 0 \\ 0 & 0 & zc \end{bmatrix} = QP.$

24. यदि $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A$ हो तो A ज्ञात कीजिए।

25. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि A (B + C) = (AB + AC)

26. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $A^2 + A = A(A + I)$ जहाँ I एक 3×3 तत्समक आव्यूह है।

27. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ हों तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A')' = A$ (ii) $(AB)' = B'A'$ (iii) $(kA)' = (kA')$

28. यदि $A = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{matrix}$ तथा $B = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 7 & 3 \end{matrix}$ हों तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(2A + B)' = 2A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$

29. सिद्ध कीजिए कि किसी भी आव्यूह A के लिए $A'A$ तथा AA' दोनों ही सममित आव्यूह हैं।

30. माना A और B, 3×3 के वर्ग आव्यूह हैं। क्या $(AB)^2 = A^2 B^2$ सत्य है? कारण बताइए।

31. दिखाइए कि यदि A और B वर्ग आव्यूह हैं तथा $AB = BA$ है, तब

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

32. यदि $A = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$, $B = \begin{matrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{matrix}$, $C = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$ तथा $a = 4, b = -2$ हों तो दिखाइए कि

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (b) $A (BC) = (AB) C$

(c) $(a + b)B = aB + bB$ (d) $a (C - A) = aC - aA$

(e) $(A^T)^T = A$ (f) $(bA)^T = b A^T$

(g) $(AB)^T = B^T A^T$ (h) $(A - B)C = AC - BC$

(i) $(A - B)^T = A^T - B^T$

33. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि $A^2 = \begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ -\sin2\theta & \cos2\theta \end{bmatrix}$

34. यदि $A = \begin{matrix} 0 & x \\ x & 0 \end{matrix}$, $B = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ और $x^2 = -1$ हो तो दिखाइए कि $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

35. $A = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{matrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि $A^2 = I$

36. गणितीय आगम के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि किसी भी वर्ग आव्यूह के लिए $(A')^n = (A^n)'$, जहाँ $n \in \mathbf{N}$

37. प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से निम्नलिखित आव्यूहों का व्युत्क्रम (यदि संभव हो तो) ज्ञात कीजिए

(i) $\begin{matrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{matrix}$ (ii) $\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{matrix}$

38. यदि $\begin{matrix} xy & 4 \\ z\ 6 & x\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 8 & w \\ 0 & 6 \end{matrix}$, हो तो x, y, z और w के मान ज्ञात कीजिए।

39. यदि $A = \begin{matrix} 1 & 5 \\ 7 & 12 \end{matrix}$ और $B = \begin{matrix} 9 & 1 \\ 7 & 8 \end{matrix}$ हों तो एक ऐसा आव्यूह C ज्ञात कीजिए कि $3A + 5B + 2C$ एक शून्य आव्यूह हो।

40. यदि $A = \begin{matrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{matrix}$ हो तो $A^2 – 5A – 14$ ज्ञात कीजिए और फिर इसके प्रयोग से A^3 ज्ञात कीजिए।

41. यदि $3 \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} = \begin{matrix} a & 6 \\ 1 & 2d \end{matrix} + \begin{matrix} 4 & a\ b \\ c\ d & 3 \end{matrix}$ हो तो a, b, c और d के मान ज्ञात कीजिए।

42. आव्यूह A ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार हो कि

$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{matrix} A = \begin{matrix} 1 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \\ 9 & 22 & 15 \end{matrix}$$

43. यदि $A = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}$ हो तो $A^2 + 2A + 7I$ ज्ञात कीजिए।

44. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा $A^{-1} = A'$ हो तो α का मान ज्ञात कीजिए।

45. यदि $\begin{matrix} 0 & a & 3 \\ 2 & b & 1 \\ c & 1 & 0 \end{matrix}$ एक विषम सममित आव्यूह हो तो a, b और c के मान ज्ञात कीजिए।

46. यदि $P(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$, हो तो दिखाइए कि

$P(x) \,.\, P(y) = P(x+y) = P(y) \,.\, P(x)$

47. यदि A एक वर्ग आव्यूह है जो $A^2 = A$ को संतुष्ट करता है तो दिखाइए कि $(I + A)^2 = 7A + I$

48. यदि A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं और B एक विषम सममित आव्यूह है तो दिखाइए कि $A'BA$ एक विषम सममित आव्यूह है।

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

49. यदि किन्ही दो वर्ग आव्यूहों के लिए $AB = BA$ हो तो गणितीय आगम से सिद्ध कीजिए कि $(AB)^n = A^n B^n$

50. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ इस प्रकार हो कि $A' = A^{-1}$ तो x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।

51. यदि संभव हो तो प्रांरभिक पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से निम्नलिखित आव्यूहों का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{matrix}$ (ii) $\begin{matrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ (iii) $\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}$

52. आव्यूह $\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{matrix}$ को एक सममित तथा एक विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में लिखिए।

बहु विकल्पीय प्रश्न (Objective type questions)

प्रश्न 53 से 67 तक दिए गए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

53. आव्यूह $P = \begin{matrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{matrix}$ है

(A) वर्ग आव्यूह (B) विकर्ण आव्यूह

(C) तत्समक आव्यूह (D) इनमें से कोई नहीं

54. कोटि 3×3 के सभी संभव आव्यूहों की संख्या जिनकी प्रत्येक प्रविष्ठि 2 या 0 हो, होगी

(A) 9 (B) 27 (C) 81 (D) 512

55. यदि $\begin{matrix} 2x & y & 4x \\ 5x & 7 & 4x \end{matrix} = \begin{matrix} 7 & 7y & 13 \\ y & x & 6 \end{matrix}$, हो तो x तथा y के मान होंगे

(A) $x = 3, y = 1$ (B) $x = 2, y = 3$

(C) $x = 2, y = 4$ (D) $x = 3, y = 3$

56. यदि $A = \frac{1}{\ } \begin{matrix} \sin^{1}(x\ ) & \tan^{1}\frac{x}{\ } \\ \sin^{1}\frac{x}{\ } & \cot^{1}(\ x) \end{matrix}$, $B = \frac{1}{\ } \begin{matrix} \cos^{1}(x\ ) & \tan^{1}\frac{x}{\ } \\ \sin^{1}\frac{x}{\ } & \tan^{1}(\ x) \end{matrix}$,

हो तो A – B बराबर है

(A) I (B) 0 (C) 2 I (D) $\frac{1}{2}$ I

57. यदि A और B क्रमश: $3 \times m$ और $3 \times n$, कोटि के दो आव्यूह हों तथा $m = n$, हो तो आव्यूह (5A – 2B) की कोटि होगी

(A) $m \times 3$ (B) 3×3 (C) $m \times n$ (D) $3 \times n$

58. यदि $A = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$, तो A^2 बराबर है

(A) $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ (B) $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ (C) $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ (D) $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

59. यदि आव्यूह $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ इस प्रकार है कि

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 \text{ यदि } i \neq j \\ 0 \text{ यदि } i \neq j \end{bmatrix}$$ तब A^2 बराबर है

(A) I (B) A (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

60. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ एक

(A) तत्समक आव्यूह है। (B) सममित आव्यूह है।

(C) विषम सममित आव्यूह है। (D) इनमें से कोई नहीं।

61. आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 12 \\ 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$

(A) विकर्ण आव्यूह है। (B) सममित आव्यूह है।

(C) विषम सममित आव्यूह है। (D) अदिश आव्यूह है।

62. यदि A एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है और B इस प्रकार का आव्यूह है कि AB' और $B'A$ दोनों ही परिभाषित हों तो आव्यूह B की कोटि होगी

(A) $m \times m$ (B) $n \times n$ (C) $n \times m$ (D) $m \times n$

63. यदि A और B समान कोटि के आव्यूह हों तो $(AB' - BA')$

(A) विषम सममित आव्यूह है। (B) रिक्त (शून्य)आव्यूह है।

(C) सममित आव्यूह है। (D) तत्समक आव्यूह है।

64. यदि A इस प्रकार की आव्यूह है कि $A^2 = I$, तब $(A-I)^3 + (A+I)^3 - 7A$ बराबर होगा

(A) A (B) $I - A$ (C) $I + A$ (D) 3A

65. किन्हीं दो A और B आव्यूहों के लिए कौन सा सदैव सत्य है

(A) $AB = BA$ (B) $AB \neq BA$ (C) $AB = O$ (D) इनमें से कोई नहीं

66. प्रारंभिक स्तंभ संक्रिया $C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$ का प्रयोग आव्यूह समीकरण

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, में करने पर हमें प्राप्त होता है

(A) $\begin{bmatrix}1 & -5\\0 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\2 & 0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1 & -5\\0 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\0 & 2\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1 & 5\\2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1 & 5\\2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\2 & 0\end{bmatrix}$

67. प्रारंभिक पंक्ति संक्रिया $R_1 \to R_1 - 3R_2$ का प्रयोग आव्यूह समीकरण

$\begin{bmatrix}4 & 2\\3 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$, में करने पर हमें प्राप्त होता है

(A) $\begin{bmatrix}-5 & -7\\3 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -7\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}-5 & -7\\3 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -3\\1 & 1\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}-5 & -7\\3 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}4 & 2\\-5 & -7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$

प्रश्न 68 से 81 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए–

68. __________ आव्यूह दोनों ही सममित तथा विषम सममित आव्यूह हैं।

69. दो विषम सममित आव्यूहों का योग सदैव __________ आव्यूह होता है।

70. किसी आव्यूह का ऋण आव्यूह इसको __________ से गुणा करके प्राप्त किया जाता है।

71. किसी आव्यूह को एक अदिश __________ से गुणा करने पर शून्य आव्यूह प्राप्त होता है।

72. एक आव्यूह जो आवश्यक नहीं कि वर्ग आव्यूह हो एक __________ आव्यूह कहलाता है।

73. आव्यूहों का गुणनफल, योग का __________ करता है।

74. यदि A एक सममित आव्यूह है तो A^3 एक __________ आव्यूह होगा।

75. यदि A एक विषम सममित आव्यूह है तो A^2 एक __________ है।

76. यदि A और B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं तो

(i) $(AB)' =$ __________

(ii) $(kA)' =$ __________ (k कोई अदिश है।)

(iii) $[k(A - B)]' =$ __________

77. यदि A विषम सममित आव्यूह है तो kA (k कोई अदिश है) एक __________ है।

78. यदि A और B सममित आव्यूह हैं तो

(i) AB – BA __________ है। (ii) BA – 2AB __________ है।

79. यदि A सममित आव्यूह है तो B′AB __________ है।

80. यदि A और B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो AB सममित आव्यूह होगा यदि और केवल यदि __________

81. एक या अधिक प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से A^{-1} ज्ञात करते समय यदि एक या एक से अधिक पंक्तियों के सभी अवयव शून्य हो जाएँ तो A^{-1} __________ होता है।

प्रश्न 82 से 101 तक बताइए कि कथन सत्य हैं या असत्य–

82. एक आव्यूह एक संख्या को निरूपित करता है।

83. किसी भी कोटि के आव्यूहों को जोड़ा जा सकता है।

84. दो आव्यूह समान होते हैं यदि उनकी पंक्तियों तथा स्तंभों की संख्या समान हो।

85. असमान कोटि वाले आव्यूहों को घटाया नहीं जा सकता है।

86. आव्यूहों का योग, साहचर्य तथा क्रम विनिमेय दोनों ही नियमों का पालन करता है।

87. आव्यूहों का गुणन क्रम विनिमेय होता है।

88. एक वर्ग आव्यूह जिसका प्रत्येक अवयव 1 हो तो उसे तत्समक आव्यूह कहते हैं।

89. यदि A और B दो समान कोटि के आव्यूह हैं तब A + B = B + A होता है।

90. यदि A और B दो समान कोटि के आव्यूह हैं तो A – B = B – A होता है।

91. यदि आव्यूह AB = O, तब A = O या B = O या दोनों A और B शून्य आव्यूह हैं।

92. एक स्तंभ आव्यूह का परिवर्त स्तंभ आव्यूह होता है।

93. यदि A और B समान कोटि के दो वर्ग आव्यूह हैं तब AB = BA है।

94. यदि समान कोटि के तीनों आव्यूह सममित हैं तब उनका योग भी सममित आव्यूह है।

95. यदि A और B समान कोटि के कोई दो आव्यूह हैं तब (AB)′ = A′B′

96. यदि $(AB)' = B'A'$, जहाँ A और B वर्ग आव्यूह नहीं है तब A के पंक्तियों की संख्या B के स्तंभों की संख्या के बराबर होगी तथा A के स्तभों की संख्या B के पंक्तियों की संख्या के बराबर होगी।

97. यदि A, B और C समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं तब $AB = AC$ से सदैव $B = C$ प्राप्त होता है।

98. किसी भी आव्यूह A के लिए AA' सदैव सममित आव्यूह होता है।

99. यदि $A = \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}$ और $B = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{matrix}$, तब AB और BA दोनों परिभाषित हैं तथा समान हैं।

100. यदि A विषम सममित आव्यूह है तो A^2 सममित आव्यूह होगा।

101. $(AB)^{-1} = A^{-1}.\, B^{-1}$ जहाँ A और B व्यूत्क्रमणीय आव्यूह हैं जो गुणन के क्रम – विनिमेय नियम को संतुष्ट करते हैं।

अध्याय 4

सारणिक

4.1 समग्र अवलोकन (Overview)

हम n कोटि के प्रत्येक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ को एक संख्या (वास्तविक या सम्मिश्र) द्वारा सबंधित करा सकते हैं जिसे वर्ग आव्यूह का सारणिक कहते हैं। इसे detA, द्वारा निरूपित किया जाता है। जहाँ a_{ij} अव्यव A का (i, j)वाँ आव्यूह है।

यदि A $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ है तो A का सारणिक को |A| (या det A)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \text{ द्वारा दिया जाता है।}$$

टिप्पणी

(i) केवल वर्ग आव्यूहों के सारणिक होते हैं।

(ii) आव्यूह A के लिए |A| को A का सारणिक पढ़ते हैं न कि A का परिमाण (Modulus)

4.1.1 एक कोटि के आव्यूह का सारणिक (Determinants of a matrix of order one)

माना एक कोटि का आव्यूह $A = [a]$ है तो A के सारणिक को a के बराबर परिभाषित किया जाता है।

4.1.2 द्वितीय कोटि के आव्यूह का सारणिक (Determinants of a matrix of order two)

माना कोटि 2 का आव्यूह $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ है। तब A के सारणिक को इस प्रकार परिभाषित करते हैं- $\det(A) = |A| = ad - bc$.

4.1.3 कोटि 3 के आव्यूह का सारणिक (Determinants of a matrix of order 3)

तृतीय कोटि के आव्यूह के सारणिक को द्वितीय कोटि के सारणिकों में व्यक्त करके ज्ञात किया जाता है। यह एक सारणिक का एक पंक्ति (या एक स्तंभ) के अनुदिश प्रसरण कहलाता है। तृतीय कोटि के

सारणिक को छह प्रकार से प्रसारित किया जा सकता है यह है। तीनों पंक्तियों (R_1, R_2 तथा R_3) और तीनों स्तंभों (C_1, C_2 तथा C_3) में से प्रत्येक के संगत प्रसरण है प्रत्येक प्रसरण से समान ही मान प्राप्त होता है।

वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$, के सारणिक पर विचार कीजिए, जहाँ

$$|A| \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$|A|$ को C_1, के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$|A| = a_{11}\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) - a_{21}\ (a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32}) + a_{31}\ (a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22})$$

टिप्पणी व्यापक रूप में यदि $A = kB$, है जहाँ A और B कोटि n के वर्ग आव्यूह हैं तब $|A| = k^n\ |B|$, $n = 1, 2, 3$.

4.1.4 सारणिकों के गुणधर्म (Properties of Determinations)

किसी भी वर्ग आव्यूह A के लिए, $|A|$ निम्नलिखित गुणधर्मो को संतुष्ट करता है।

(i) $|A'| = |A|$, जहाँ A' आव्यूह A का परिवर्त है।

(ii) यदि हम एक सारणिक की कोई दो पंक्तियों (या स्तंभों) को परस्पर परिवर्तित कर दें तो सारणिक का चिन्ह परिवर्तित हो जाता है।

(iii) यदि एक सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ (अथवा स्तंभ) समान हैं (या समानुपाती है) तब सारणिक का मान शून्य होता है।

(iv) किसी सारणिक को एक अचर k से गुणा करने का अर्थ है कि इसके केवल एक पंक्ति (अथवा स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को k से गुणा करना।

(v) यदि हम एक सारणिक के किसी एक पंक्ति (अथवा स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को एक अचर k से गुणा करते हैं तो सारणिक का मान भी k से गुणित हो जाता है।

(vi) यदि एक सारणिक की एक पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों को दो या अधिक पदों के योगफल के रूप में व्यक्त किया गया हो तो दिए गए सारणिक को दो या अधिक सारणिकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

(vii) यदि एक सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तंभ) के प्रत्येक अवयव में दूसरी पंक्ति (या स्तंभ) के संगत अवयवों के समान गुणज़ों को जोड़ दिया जाता है तो सारणिक का मान वही रहता है।

टिप्पणी

(i) यदि किसी पंक्ति (या स्तंभ) के सभी अवयव शून्य हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

(ii) यदि $x = \alpha$ रखने पर सारणिक 'Δ' का मान शून्य हो जाता है तब 'Δ' का एक गुणनखंड $(x - \alpha)$ होता है।

(iii) यदि किसी सारणिक के मुख्य विकर्ण के ऊपर या नीचे के सभी अवयव शून्य हैं तब सारणिक का मान विकर्ण के सभी अवयवों के गुणनफल के बराबर होता है।

4.1.5 त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a triangle)

(x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) शीर्षों वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ से दिया जाता है।

4.1.6 उपसारणिक और सहखंड (Minors and Co-factor)

(i) आव्यूह A के सारणिक के अवयव a_{ij} का उप-सारणिक वह सारणिक है जो i वीं पंक्ति और j वें स्तंभ को हटाने से प्राप्त होता है तथा इसे M_{ij} द्वारा व्यक्त करते हैं।

(ii) एक अवयव a_{ij} के सहखंड को $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ द्वारा दिया जाता है।

(iii) किसी आव्यूह A के सारणिक का मान किसी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग होता है। उदाहरणार्थ

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

(iv) यदि एक पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों को अन्य पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंडों से गुणा किया जाए तो उनका योग शून्य होता है। उदाहरणार्थ

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$$

4.1.7 आव्यूह के सहखंडज और व्युत्क्रम (Adjoint and Inverse of a Matrix)

(i) एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ के सहखंडज को आव्यूह $[A_{ij}]_{n\times n}$ के परिवर्त के रूप में

परिभाषित किया जाता है। जहाँ A_{ij} अवयव a_{ij} का सहखंड है। इसे *adj* A द्वारा व्यक्त करते हैं।

यदि A $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, तब *adj* A $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$, जहाँ A_{ij} का सहखंड a_{ij} है।

(ii) A (*adj* A) = (*adj* A) A = |A| I, जहाँ A एक कोटि n का वर्ग आव्यूह है।

(iii) यदि |A| = 0 तो वर्ग आव्यूह A को अव्युत्क्रमणीय (singular) कहते हैं तथा यदि $|A| \neq 0$ हो तो व्युत्क्रमणीय (non-singular) कहते हैं

(iv) यदि A एक कोटि n का वर्ग आव्यूह है तो $|adj\ A| = |A|^{n-1}$ होता है।

(v) यदि A और B समान कोटि की व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं तो AB तथा BA भी उसी कोटि की व्युत्क्रमणीय आव्यूह होंगे।

(vi) आव्यूहों के गुणनफल का सारणिक उनके क्रमशः सारणिकों के गुणनफल के समान होता है। अर्थात् |AB| = |A| |B|

(vii) यदि AB = BA = I हो जहाँ A और B वर्ग आव्यूह हैं तब B को A का व्युत्क्रम कहते हैं और इसे $B = A^{-1}$ लिखते हैं। इसके अतिरिक्त $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$ होता है।

(viii) आव्यूह A व्युत्क्रमणीय होता है यदि और केवल यदि $|A| \neq 0$ हो।

(ix) यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(adj\ A)$

4.1.8 रैखिक समीकरणों के निकाय (System of Linear equations)

(i) निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए

$$a_1x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3x + b_3 y + c_3 z = d_3,$$

आव्यूहों के रूप में इन समीकरणों को A X = B, से व्यक्त कर सकते हैं जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

(ii) समीकरण AX = B के अद्वितीय (unique) हल को $X = A^{-1}B$, जहाँ $|A| \neq 0$ है द्वारा दिया जाता है।

(iii) समीकरणों का एक निकाय संगत या असंगत होता है यदि इसके हल का अस्तित्व है अथवा नहीं है।

(iv) आव्यूह समीकरण AX = B में वर्ग आव्यूह A के लिए

(a) यदि $|A| \neq 0$, तो अद्वितीय हल अस्तित्व है।

(b) यदि $|A| = 0$ और $(adj\ A)\ B \neq 0$, तो किसी हल का अस्तित्व नहीं है।

(c) यदि $|A| = 0$ और $(adj\ A)\ B = 0$, तो निकाय संगत तथा अनंत हल होते हैं।

4.2 हल किए हुए उदाहरण (Solved Examples)

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 यदि $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$, तो x ज्ञात कीजिए।

हल हमें दिया है $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$ इसलिए

$$2x^2 - 40 = 18 - 40 \quad \Rightarrow x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$$

उदाहरण 2 यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta + \Delta_1 = 0$

हल हमें दिया है $\quad _1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$

पंक्तियों और स्तंभों का परस्पर परिवर्तन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$1 \quad \begin{vmatrix} 1 & yz & x \\ 1 & zx & y \\ 1 & xy & z \end{vmatrix} \qquad = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x & xyz & x^2 \\ y & xyz & y^2 \\ z & xyz & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ y & 1 & y^2 \\ z & 1 & z^2 \end{vmatrix},$$ C_1 और C_2 का परस्पर परिवर्तन करने पर

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad -$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_1 + \Delta \;=\; 0$$

उदाहरण 3 बिना प्रसरण किए, दिखाइए कि

$$\begin{vmatrix} \text{cosec}^2 & \cot^2 & 1 \\ \cot^2 & \text{cosec}^2 & 1 \\ 42 & 40 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

हल $C_1 \rightarrow C_1 - C_2 - C_3$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} \text{cosec}^2 \;\; -\cot^2 \;\; -1 & \cot^2 & 1 \\ \cot^2 \;\; -\text{cosec}^2 \;\; 1 & \text{cosec}^2 & 1 \\ 0 & 40 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cot^2\theta & 1 \\ 0 & \text{cosec}^2\theta & -1 \\ 0 & 40 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

उदाहरण 4 दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} x & p & q \\ p & x & q \\ q & q & x \end{vmatrix} = (x - p)(x^2 + px - 2q^2)$

हल $C_1 \to C_1 - C_2$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} x \quad p & p & q \\ p \quad x & x & q \\ 0 & q & x \end{vmatrix} \qquad (x \quad p)\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 1 & x & q \\ 0 & q & x \end{vmatrix}$$

$$=(x-p)\begin{vmatrix} 0 & p+x & 2q \\ -1 & x & q \\ 0 & q & x \end{vmatrix}, \quad R_1 \to R_1 + R_2 \text{ का प्रयोग करने पर}$$

C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं

$$(x \quad p)(px \quad x^2 \quad 2q^2) = (x \quad p)(x^2 \quad px \quad 2q^2)$$

उदाहरण 5 यदि $\begin{vmatrix} 0 & b \quad a & c \quad a \\ a \quad b & 0 & c \quad b \\ a \quad c & b \quad c & 0 \end{vmatrix}$, दो दिखाइए कि $= 0$ है।

हल पंक्तियों तथा स्तभों का परस्पर विनिमय करने पर हम पाते हैं कि $\begin{vmatrix} 0 & a \quad b & a \quad c \\ b \quad a & 0 & b \quad c \\ c \quad a & c \quad b & 0 \end{vmatrix}$

R_1, R_2 और R_3 में '–1' उभयनिष्ठ लेने पर हम पाते हैं

$$(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & b \quad a & c \quad a \\ a \quad b & 0 & c \quad b \\ a \quad c & b \quad c & 0 \end{vmatrix} \quad -$$

$$\Rightarrow \quad 2 \quad = 0 \qquad \text{या} \qquad = 0$$

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि $(A^{-1})' = (A')^{-1}$, जहाँ A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

हल क्योंकि A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है इसलिए $|A| \neq 0$

हम जानते हैं कि $|A| = |A'|$ परंतु $|A| \neq 0$. इसलिए $|A'| \neq 0$ अर्थात्, A′ भी व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

हम जानते हैं कि $AA^{-1} = A^{-1} A = I$

दोनों ओर आव्यूहों का परिवर्त लेने पर हम पाते हैं

$(A^{-1})' \; A' = A' \; (A^{-1})' = (I)' \; = I$

अतः $(A^{-1})'$ आव्यूह A' का व्युत्क्रम है अर्थात् $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 7 यदि $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$, का एक मूल $x = -4$ हो तो अन्य दो मूलों को ज्ञात कीजिए।

हल $R_1 \to (R_1 + R_2 + R_3)$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} x \;\; 4 & x \;\; 4 & x \;\; 4 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

R_1 से उभयनिष्ठ $(x + 4)$ लेने पर हम पाते हैं

$$(x \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$, के प्रयोग से हम पाते हैं

$$(x \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x \quad 1 & 0 \\ 3 & \quad 1 & x \quad 3 \end{vmatrix}.$$

R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं

$\Delta = (x + 4) \, [(x - 1) \, (x - 3) - 0]$. परंतु $\Delta = 0$ दिया है इसलिए

$$x = -4, 1, 3$$

अतः $x = -4$ के अतिरिक्त अन्य दो मूल 1 तथा 3 हैं।

उदाहरण 8 एक त्रिभुज ABC में यदि

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 \quad \sin A & 1 \quad \sin B & 1 \quad \sin C \\ \sin A + \sin^2 A & \sin B + \sin^2 B & \sin C + \sin^2 C \end{vmatrix} \quad 0$$

तो सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 \quad \sin A & 1 \quad \sin B & 1 \quad \sin C \\ \sin A + \sin^2 A & \sin B + \sin^2 B & \sin C + \sin^2 C \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 \quad \sin A & 1 \quad \sin B & 1 \quad \sin C \\ \cos^2 A & \cos^2 B & \cos^2 C \end{vmatrix}, \; R_3 \to R_3 - R_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 \quad \sin A & \sin B \quad \sin A & \sin C \quad \sin B \\ \cos^2 A & \cos^2 A \quad \cos^2 B & \cos^2 B \quad \cos^2 C \end{vmatrix}, \; (C_3 \to C_3 - C_2 \text{ और } C_2 \to C_2 - C_1)$$

R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं

$$\Delta = (\sin B - \sin A)\,(\sin^2 C - \sin^2 B) - (\sin C - \sin B)\,(\sin^2 B - \sin^2 A)$$

$$= (\sin B - \sin A)\,(\sin C - \sin B)\,(\sin C - \sin A) = 0$$

$\Rightarrow$ $\sin B - \sin A = 0$ या $\sin C - \sin B$ या $\sin C - \sin A = 0$

$\Rightarrow$ $A = B$ या $B = C$ या $C = A$

अर्थात् त्रिभुज ABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

उदाहरण 9 दिखाइए कि यदि सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & 2 & \sin 3 \\ 7 & 8 & \cos 2 \\ 11 & 14 & 2 \end{vmatrix}$ 0 है तब $\sin\theta = 0$ या $\frac{1}{2}$ होगा।

हल $R_2 \to R_2 + 4R_1$ और $R_3 \to R_3 + 7R_1$ के प्रयोग से हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & \sin 3 \\ 5 & 0 & \cos 2 \quad 4\sin 3 \\ 10 & 0 & 2+7\sin 3 \end{vmatrix} \quad 0$$

या $\qquad 2\,[5\,(2 + 7\sin 3\theta) - 10\,(\cos 2\theta + 4\sin 3\theta)] = 0$

या $\qquad 2 + 7\sin 3\theta - 2\cos 2\theta - 8\sin 3\theta = 0$

या $\qquad 2 - 2\cos 2\theta - \sin 3\theta = 0$

या $\qquad \sin\theta\ (4\sin^2\theta + 4\sin\theta - 3) = 0$

या $\qquad \sin\theta = 0$ या $(2\sin\theta - 1) = 0$ या $(2\sin\theta + 3) = 0$

या $\qquad \sin\theta = 0$ या $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ (क्यों ?)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

उदाहरण 10 और 11 में दिए गए चार विकल्पों में से प्रत्येक के लिए सही उत्तर चुनिए-

उदाहरण 10 यदि $\Delta = \begin{vmatrix} Ax & x^2 & 1 \\ By & y^2 & 1 \\ Cz & z^2 & 1 \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ zy & zx & xy \end{vmatrix}$, तब

(A) $\Delta_1 = -\Delta$ $\qquad$ (B) $\Delta \neq \Delta_1$ $\qquad$ (C) $\Delta - \Delta_1 = 0$ $\qquad$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (C) है क्योंकि $\quad {}_1 \begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ zy & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & x & yz \\ B & y & zx \\ C & z & xy \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} Ax & x^2 & xyz \\ By & y^2 & xyz \\ Cz & z^2 & xyz \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} Ax & x^2 & 1 \\ By & y^2 & 1 \\ Cz & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

उदाहरण 11 यदि $x, y \in \mathbf{R}$, तब सारणिक $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & 1 \\ \sin x & \cos x & 1 \\ \cos(x \quad y) & \sin(x \quad y) & 0 \end{vmatrix}$ किस अंतराल में है

(A) $\sqrt{2}, \sqrt{2}$ (B) [–1, 1] (C) $\sqrt{2}, 1$ (D) $1, \quad \sqrt{2},$

हल सही उत्तर (A) है। वास्तव में $R_3 \to R_3 - \cos y R_1 + \sin y R_2$ के प्रयोग से हमें प्राप्त होता है

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & 1 \\ \sin x & \cos x & 1 \\ 0 & 0 & \sin y \quad \cos y \end{vmatrix}.$$

R_3 के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं

$$\Delta = (\sin y - \cos y)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= (\sin y - \cos y) = \sqrt{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sin y \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cos y$$

$$= \sqrt{2} \quad \cos \frac{}{4} \sin y \quad \sin \frac{}{4} \cos y \qquad = \sqrt{2} \sin (y - \frac{\pi}{4})$$

इसलिए $-\sqrt{2} \quad \leq \Delta \leq \sqrt{2}$

उदाहरण 12 से 14 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान को भरिए–

उदाहरण 12 यदि A, B, C एक त्रिभुज के कोण हैं तब

$$\begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B & \cot B & 1 \\ \sin^2 C & \cot C & 1 \end{vmatrix} \quad ....$$

हल उत्तर 0 है। $R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ का प्रयोग कीजिए।

उदाहरण 13 सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{23}+\sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{15}+\sqrt{46} & 5 & \sqrt{10} \\ 3+\sqrt{115} & \sqrt{15} & 5 \end{vmatrix} = $ __________

हल उत्तर 0 है। C_2 और C_3 से उभयनिष्ठ $\sqrt{5}$ निकालिए और उसके बाद $C_1 \to C_3 - \sqrt{3}\ C_2$ के प्रयोग से वाँछित परिणाम प्राप्त होगा।

उदाहरण 14 सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2 23° & \sin^2 67° & \cos 180° \\ -\sin^2 67° & -\sin^2 23° & \cos^2 180° \\ \cos 180° & \sin^2 23° & \sin^2 67° \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_.$$

हल $\Delta = 0$ है। $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ का प्रयोग कीजिए।

बताइए कि उदाहरण 15 से 18 तक दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य–

उदाहरण 15 सारणिक

$$\begin{vmatrix} \cos(x \quad y) & \sin(x \quad y) & \cos 2y \\ \sin x & \cos x & \sin y \\ \cos x & \sin x & \cos y \end{vmatrix}, x \text{ से स्वतंत्र है।}$$

हल सत्य है। $R_1 \to R_1 + \sin y R_2 + \cos y\ R_3$ का प्रयोग कीजिए और फिर सरल कीजिए।

उदाहरण 16 सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^{n}C_1 & {}^{n+2}C_1 & {}^{n+4}C_1 \\ {}^{n}C_2 & {}^{n+2}C_2 & {}^{n+4}C_2 \end{vmatrix} = 8$$

हल सत्य है।

उदाहरण 17 यदि A $\begin{matrix} x & 5 & 2 \\ 2 & y & 3 \\ 1 & 1 & z \end{matrix}$, $xyz = 80, 3x + 2y + 10z = 20$, तब

$$A\ adj.\ A \quad \begin{matrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{matrix}$$

हल : असत्य

उदाहरण 18 यदि A $\begin{matrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$, A^{-1} $\begin{matrix} \frac{1}{2} & 4 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & y & \frac{1}{2} \end{matrix}$

तब $x = 1, y = -1$

हल सत्य

4.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय (S.A.)

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके प्रश्न 1 से 6 तक के मान निकालिए–

1. $\begin{vmatrix} x^2 \;\; x \;\; 1 & x \;\; 1 \\ x \;\; 1 & x \;\; 1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a \;\; x & y & z \\ x & a \;\; y & z \\ x & y & a \;\; z \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 0 & xy^2 & xz^2 \\ x^2y & 0 & yz^2 \\ x^2z & zy^2 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3x & x \;\; y & x \;\; z \\ x \;\; y & 3y & z \;\; y \\ x \;\; z & y \;\; z & 3z \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} x \;\; 4 & x & x \\ x & x \;\; 4 & x \\ x & x & x \;\; 4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} a \;\; b \;\; c & 2a & 2a \\ 2b & b \;\; c \;\; a & 2b \\ 2c & 2c & c \;\; a \;\; b \end{vmatrix}$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके प्रश्न 7 से 9 तक सिद्ध कीजिए।

7. $\begin{vmatrix} y^2z^2 & yz & y \;\; z \\ z^2x^2 & zx & z \;\; x \\ x^2y^2 & xy & x \;\; y \end{vmatrix} \quad 0$

8. $\begin{vmatrix} y \;\; z & z & y \\ z & z \;\; x & x \\ y & x & x \;\; y \end{vmatrix} \quad 4xyz$

9. $\begin{vmatrix} a^2 \;\; 2a & 2a \;\; 1 & 1 \\ 2a \;\; 1 & a \;\; 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (a \;\; 1)^3$

10. यदि A + B + C = 0 तो सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & 1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix} \quad 0$

11. यदि एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) तथा त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई 'a' है तो सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \dfrac{3a^4}{4}$

12. θ का वह मान ज्ञात कीजिए जो $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sin 3\theta \\ -4 & 3 & \cos 2\theta \\ 7 & -7 & -2 \end{bmatrix} = 0$ को संतुष्ट करता हो।

13. यदि $\begin{matrix} 4 & x & 4 & x & 4 & x \\ 4 & x & 4 & x & 4 & x \\ 4 & x & 4 & x & 4 & x \end{matrix} \quad 0$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $a_1, a_2, a_3, ..., a_r$ G.P. में हैं तो सिद्ध कीजिए कि सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_{r\;1} & a_{r\;5} & a_{r\;9} \\ a_{r\;7} & a_{r\;11} & a_{r\;15} \\ a_{r\;11} & a_{r\;17} & a_{r\;21} \end{vmatrix}$$ r से स्वतंत्र है।

15. दर्शाइए कि a के किसी भी मान के लिए बिंदु $(a + 5, a - 4)$, $(a - 2, a + 3)$ और (a, a) एक सरल रेखा में नहीं है।

16. दर्शाइए कि त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है यदि सारणिक

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\cos A & 1+\cos B & 1+\cos C \\ \cos^2 A + \cos A & \cos^2 B + \cos B & \cos^2 C + \cos C \end{bmatrix} = 0$$

17. यदि $A \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ तो A^{-1} ज्ञात कीजिए और दर्शाइए कि $A^{-1} \quad \dfrac{A^2 \quad 3I}{2}$.

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

18. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

A^{-1} का प्रयोग करके रैखिक समीकरणों के निकाय $x - 2y = 10$, $2x - \ y - z = 8$, $-2y + z = 7$ को हल कीजिए।

19. आव्यूह विधि से समीकरण निकाय $3x + 2y - 2z = 3,\ x + 2y + 3z = 6, 2x - y + z = 2$ को हल कीजिए।

20. यदि $A \quad \begin{matrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{matrix}$, $B \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$, तो BA ज्ञात कीजिए और इसका प्रयोग समीकरण निकाय $y + 2z = 7, x - y = 3,\ 2x + 3y + 4z = 17$ को हल करने के लिए कीजिए।

21. यदि $a + b + c \neq 0$ और $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि $a = b = c$

22. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} bc \quad a^2 & ca \quad b^2 & ab \quad c^2 \\ ca \quad b^2 & ab \quad c^2 & bc \quad a^2 \\ ab \quad c^2 & bc \quad a^2 & ca \quad b^2 \end{vmatrix}$, $a + b + c$ से विभाजित होता है।

इसका भागफल भी ज्ञात कीजिए।

23. यदि $x + y + z = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Objective Type Questions)

प्रश्न 24 से 37 तक प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए-

24. यदि $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$, तब x का मान है

(A) 3 (B) ± 3(C) ± 6 (D) 6

25. सारणिक $\begin{vmatrix} a-b & b+c & a \\ b-a & c+a & b \\ c-a & a+b & c \end{vmatrix}$ का मान है

(A) $a^3 + b^3 + c^3$ (B) $3\,abc$

(C) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (D) इनमें से कोई नहीं

26. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई है जिसके शीर्ष $(-3, 0), (3, 0)$ और $(0, k)$ हैं तो k का मान होगा

(A) 9 (B) 3

(C) -9 (D) 6

27. सारणिक $\begin{vmatrix} b^2 & ab & b & c & bc & ac \\ ab & a^2 & a & b & b^2 & ab \\ bc & ac & c & a & ab & a^2 \end{vmatrix}$ बराबर है

(A) $abc\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$ (B) $(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$

(C) $(a+b+c)\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$ (D) इनमें से कोई नहीं

28. अंतराल $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ में सारणिक $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \cos x \\ \cos x & \cos x & \sin x \end{vmatrix}$ 0 के विभिन्न वास्तविक मूलों की संख्या है

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 3

29. यदि A, B और C एक त्रिभुज के कोण हैं तो सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & 1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix} \text{ बराबर है}$$

(A) 0 (B) – 1 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

30. यदि $f(t) = \begin{vmatrix} \cos t & t & 1 \\ 2\sin t & t & 2t \\ \sin t & t & t \end{vmatrix}$, तब $\lim\limits_{t \quad 0} \dfrac{f(t)}{t^2}$ बराबर है

(A) 0 (B) – 1 (C) 2 (D) 3

31. यदि θ एक वास्तविक संख्या है तब $\begin{vmatrix} & 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & \sin & 1 \\ 1 & \cos & & 1 & 1 \end{vmatrix}$ का अधिकतम मान है।

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{4}$

32. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} 0 & x \quad a & x \quad b \\ x \quad a & 0 & x \quad c \\ x \quad b & x \quad c & 0 \end{vmatrix}$, तब

(A) $f(a) = 0$ (B) $f(b) = 0$ (C) $f(0) = 0$ (D) $f(1) = 0$

33. यदि $A = \begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}$, तब A^{-1} का अस्तित्व है यदि

(A) $\lambda = 2$ (B) $\lambda \neq 2$ (C) $\lambda \neq -2$ (D) इनमें से कोई नहीं

34. यदि A और B व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं तब निम्न में से कौन सा सत्य नहीं है?

(A) $adj\ A = |A|.\ A^{-1}$ (B) $\det(A)^{-1} = [\det(A)]^{-1}$

(C) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (D) $(A + B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

35. यदि x, y, z में कोई भी शून्य नहीं है और $\begin{vmatrix} 1 \quad x & 1 & 1 \\ 1 & 1 \quad y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \quad z \end{vmatrix} \; 0$, है तब

$x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$ बराबर है

(A) $x\,y\,z$ (B) $x^{-1}\,y^{-1}\,z^{-1}$ (C) $-x\;-y\;-z$ (D) -1

36. सारणिक $\begin{vmatrix} x & x \quad y & x \quad 2y \\ x \quad 2y & x & x \quad y \\ x \quad y & x \quad 2y & x \end{vmatrix}$ का मान है

(A) $9x^2\,(x + y)$ (B) $9y^2\,(x + y)$ (C) $3y^2\,(x + y)$ (D) $7x^2\,(x + y)$

37. 'a' के ऐसे दो मान हैं जिनके लिए $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 4 & 2a \end{vmatrix} = 86$, है तो इन दो संख्याओं का योग है

(A) 4 (B) 5 (C) -4 (D) 9

रिक्त स्थान भरिए–

38. यदि A एक 3×3 कोटि का आव्यूह है तो $|3A| =$ ________

39. यदि A एक 3×3 कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब $|A^{-1}| =$ ________

40. यदि $x, y, z \in \mathbf{R}$, तब सारणिक $\begin{vmatrix} 2^x \quad 2^{-x}\;{}^2 & 2^x \quad 2^{-x}\;{}^2 & 1 \\ 3^x \quad 3^{-x}\;{}^2 & 3^x \quad 3^{-x}\;{}^2 & 1 \\ 4^x \quad 4^{-x}\;{}^2 & 4^x \quad 4^{-x}\;{}^2 & 1 \end{vmatrix}$ बराबर है ________।

41. यदि $\cos 2\theta = 0$, तब $\begin{vmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}^2 =$ ________.

42. यदि A एक 3×3 कोटि का आव्यूह है तब $(A^2)^{-1} =$ ________

43. यदि A एक 3×3 कोटि का आव्यूह है तब A के सारणिक के सभी उप-सारणिकों की संख्या ________ है।

44. एक सारणिक A की किसी पंक्ति के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग __________ के बराबर होता है।

45. यदि समीकरण $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$ का एक मूल $x = -9$ है तब इसके अन्य दो मूल __________ हैं।

46. $\begin{vmatrix} 0 & xyz & x-z \\ y-x & 0 & y-z \\ z-x & z-y & 0 \end{vmatrix} =$ __________

47. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} (1+x)^{17} & (1+x)^{19} & (1+x)^{23} \\ (1+x)^{23} & (1+x)^{29} & (1+x)^{34} \\ (1+x)^{41} & (1+x)^{43} & (1+x)^{47} \end{vmatrix} = A + Bx + Cx^2 + \ldots,$ है तब

A = __________

बताइए कि प्रश्न 48 से 58 तक दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य–

48. $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$, जहाँ A एक वर्ग आव्यूह है और $|A| \neq 0$ है।

49. $(aA)^{-1} = \frac{1}{a}A^{-1}$, जहाँ a एक वास्तविक संख्या है और A एक वर्ग आव्यूह है।

50. $|A^{-1}| \neq |A|^{-1}$, जहाँ A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

51. यदि A और B कोटि 3 के आव्यूह हैं और $|A| = 5, |B| = 3$, तब $|3AB| = 27 \times 5 \times 3 = 405$.

52. यदि तीन कोटि के एक सारणिक का मान 12 है तब इसके प्रत्येक अवयव को इसके सहखंड से बदलने पर प्राप्त सारणिक का मान 144 होगा।

53. $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix} = 0$, जहाँ a, b, c, A.P में है।

54. $|adj.\ A| = |A|^2$, जहाँ A एक कोटि 2 का वर्ग आव्यूह है।

55. सारणिक $\begin{vmatrix} \sin A & \cos A & \sin A + \cos B \\ \sin B & \cos A & \sin B + \cos B \\ \sin C & \cos A & \sin C + \cos B \end{vmatrix} = 0$

56. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} x & a & p & u & l & f \\ y & b & q & v & m & g \\ z & c & r+w & n & h \end{vmatrix}$ को कोटि 3 के K सारणिकों में ऐसे विघटित किया जाए कि उनके प्रत्येक अवयव में केवल एक पद हो तब K का मान 8 है।

57. यदि $\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$ 16, है तब $\Delta_1 = \begin{vmatrix} p+x & a+x & a+p \\ q+y & b+y & b+q \\ r+z & c+z & c+r \end{vmatrix} = 32$ होगा।

58. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1+\sin\theta) & 1 \\ 1 & 1 & 1+\cos\theta \end{vmatrix}$ का अधिकतम मान $\frac{1}{2}$ है।

अध्याय 5

सांतत्य और अवकलनीयता

5.1 समग्र अवलोकन (Overview)

5.1.1 *किसी बिंदु पर एक फलन का सांतत्य*

मान लीजिए कि वास्तविक संख्याओं के किसी उपसमुच्चय पर f कोई वास्तविक फलन है तथा यह भी मान लीजिए कि c फलन f के प्रांत में स्थित एक बिंदु है। तब f, बिंदु c पर संतत होता है, यदि

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

अधिक सुस्पष्ट रूप से, यदि $x = c$ पर फलन के वाम पक्ष की सीमा, दक्षिण सीमा तथा फलन के मान का अस्तित्व हो और ये परस्पर बराबर हों, अर्थात्

$$\lim_{x \quad c} f(x) \quad f(c) \quad \lim_{x \quad c} f(x)$$

तो f को $x = c$ पर संतत कहा जाता है।

5.1.2 *एक अंतराल में सांतत्य*

(i) f एक खुले अंतराल (a, b) में संतत कहा जाता है, यदि वह इस अंतराल में प्रत्येक बिंदु पर संतत हो।

(ii) f एक बंद अंतराल $[a, b]$ में संतत कहा जाता है, यदि

- f अंतराल (a, b) में संतत हो।
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

5.1.3 *सांतत्य का ज्यामितीय अर्थ*

(i) $x = c$ पर फलन f संतत होगा, यदि बिंदु $(c, f(c))$ पर इस फलन के आलेख में कोई विच्छेदन न हो।

(ii) एक अंतराल में कोई फलन संतत कहा जाता है, यदि इस संपूर्ण अंतराल में उस फलन के आलेख में कोई विच्छेदन न हो।

5.1.4 *असांतत्य*

फलन f बिंदु $x = a$ पर निम्नलिखित स्थितियों में से किसी में भी असंतत होगा:

(i) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ और $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ का अस्तित्व है, परंतु ये बराबर नहीं हैं।

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ और $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ के अस्तित्व बराबर हैं, परंतु इनका मान $f(a)$ के बराबर नहीं हैं।

(iii) $f(a)$ परिभाषित नहीं है।

5.1.5 *कुछ सामान्य फलनों का सांतत्य*

फलन $f(x)$	**अंतराल जिसमें f संतत है**
1. अचर फलन, अर्थात् $f(x) = c$	
2. तत्समक फलन, अर्थात् $f(x) = x$	**R**
3. बहुपद फलन, अर्थात् $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$	
4. $\lvert x - a \rvert$	$(-\infty, \infty)$
5. x^{-n}, n एक धनात्मक पूर्णांक है	$(-\infty, \infty) - \{0\}$
6. $p(x) / q(x)$, जहाँ $p(x)$ और $q(x)$ चर x में बहुपद हैं	$\mathbf{R} - \{x : q(x) = 0\}$
7. $\sin x$, $\cos x$	**R**
8. $\tan x$, $\sec x$	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\}$

9. cot x, cosec x — $\mathbf{R}-\{(n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$

10. e^x — $\mathbf{R}$

11. $\log x$ — $(0, \infty)$

12. अपने संगत प्रांतों में प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन अर्थात् $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x$ इत्यादि।

5.1.6 *संयोजित फलनों का सांतत्य*

मान लीजिए कि f और g वास्तविक मानों वाले ऐसे फलन हैं कि (fog) बिंदु a पर परिभाषित है। यदि a पर g संतत है तथा $g(a)$ पर f संतत है, तो (fog) बिंदु a पर संतत होता है।

5.1.7 *अवकलनीयता*

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, जहाँ भी सीमा का अस्तित्व हो, से परिभाषित फलन को x पर f के अवकलज के रूप में परिभाषित किया जाता है। दूसरे शब्दों में हम कहते हैं कि कोई फलन f अपने प्रांत में किसी बिंदु c पर अवकलनीय होता है, यदि $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$, जिसे वाम अवकलज कहा जाता है और $Lf'(c)$ से व्यक्त किया जाता है तथा $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$, जिसे दक्षिण अवकलज कहा जाता है और $Rf'(c)$ से व्यक्त किया जाता है, दोनों ही परिमित हों तथा परस्पर बराबर हों।

(i) फलन $y = f(x)$ को एक खुले अंतराल (a, b) में अवकलनीय कहा जाता है, यदि वह (a, b) के प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय होता है।

(ii) फलन $y = f(x)$ को एक बंद अंतराल $[a, b]$ में अवकलनीय कहा जाता है, यदि $Rf'(a)$ और $Lf'(b)$ का अस्तित्व हो तथा (a, b) के प्रत्येक बिंदु के लिए $f'(x)$ का अस्तित्व हो।

(iii) प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

5.1.8 *अवकलजों का बीजगणित*

यदि u और v चर x के फलन हैं, तो

(i) $\dfrac{d(u\pm v)}{dx} = \dfrac{du}{dx}\pm\dfrac{dv}{dx}$ (ii) $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}$ (iii) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

5.1.9 शृंखला नियम फलनों के संयोजन को अवकलित करने के लिए एक नियम है। मान लीजिए कि $f = vou$। यदि $t = u(x)$ तथा $\frac{dt}{dx}$ और $\frac{dv}{dt}$ दोनों का ही अस्तित्व है तो $\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$।

5.1.10 कुछ मानक अवकलज (अपने उपयुक्त प्रांतों में) निम्नलिखित हैं:

1. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ 4. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$

5. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$ 6. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$

5.1.11 *चरघातांकी और लघुगणकीय फलन*

(i) मान लीजिए धनात्मक आधार $b > 1$ वाला चरघातांकी फलन $y = f(x) = b^x$ है। इसका प्रांत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय **R** है तथा परिसर सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। आधार 10 वाला चरघातांकी फलन सामान्य चरघातांकी फलन कहलाता है तथा आधार e वाला चरघातांकी फलन प्राकृतिक चरघातांकी फलन कहलाता है।

(ii) मान लीजिए कि $b > 1$, यदि $b^x = a$ तो आधार b पर a के लघुगणक, x होता है। इसे $\log_b a = x$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। यदि आधार $b = 10$ हो, तो इसे सामान्य लघुगणक कहा जाता है तथा यदि आधार $b = e$ हो, तो इसे प्राकृतिक लघुगणक कहा जाता है। $\log x$ आधार $- e$ पर लघुगणक फलन को व्यक्त करता है। लघुगणकीय फलन का प्रांत सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\mathbf{R}^+$ है तथा इसका परिसर सभी वास्तविक संख्याओं समुच्चय R है।

(iii) किसी भी आधार $b > 1$ के लिए, लघुगणकीय फलन के गुण नीचे लिखे जा रहे हैं:

1. $\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$; $x > 0$; $y > 0$ 4. $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$, जहाँ $c > 1$ हैं।

2. $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$ 5. $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$

3. $\log_b x^n = n \log_b x$ 6. $\log_b b = 1$ और $\log_b 1 = 0$

(iv) x के सापेक्ष e^x का अवकलज e^x है, अर्थात् $\frac{d}{dx}(e^x) \quad e^x$ है। x के सापेक्ष $(\log x)$ का अवकलज $\frac{1}{x}$ है, अर्थात् $\frac{d}{dx}(\log x) \quad \frac{1}{x}$ है।

5.1.12 $f(x) = (u(x))^{v(x)}$, के रूप के फलनों को अवकलित करने के लिए, लघुगणकीय अवकलन एक सशक्त तकनीक है जहाँ f और u दोनों का, इस तकनीक का कुछ अर्थ होने के लिए, धनात्मक फलन होना आवश्यक है।

5.1.13 *किसी फलन का एक अन्य फलन के सापेक्ष अवकलन*

मान लीजिए कि $u = f(x)$ और $v = g(x)$ चर x के दो फलन हैं। तब, $g(x)$ के सापेक्ष $f(x)$ का अवकलज ज्ञात करने के लिए, अर्थात् $\frac{du}{dv}$ ज्ञात करने के लिए, हम सूत्र

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$$ का उपयोग करते हैं।

5.1.14 *द्वितीय कोटि अवकलज*

$\frac{d}{dx} \ \frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2}$, फलन y का x के सापेक्ष द्वितीय कोटि अवकलज कहलाता है। यदि $y = f(x)$ हो, तो इसे y'' या y_2 से व्यक्त करते हैं।

5.1.15 *रोले का प्रमेय*

मान लीजिए कि $f : [a, b] \quad \mathbf{R}$ अंतराल $[a, b]$ पर संतत और (a, b) पर अवकलनीय इस प्रकार है कि $f(a) = f(b)$, जहाँ a और b कोई वास्तविक संख्याएँ हैं। तब (a, b) में न्यूनतम एक बिंदु c का अस्तित्व इस प्रकार है कि $f'(c) = 0$।

ज्यामितीय रूप से, रोले का प्रमेय यह सुनिश्चित करता है कि वक्र $y = f(x)$ पर न्यूनतम एक बिंदु ऐसा है कि जिस पर वक्र की स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है (बिंदु का भुज (a, b) में स्थित है)।

5.1.16 *माध्यमान प्रमेय (लग्रांज)*

मान लीजिए कि $f : [a, b] \quad \mathbf{R}$ अंतराल $[a, b]$ पर एक संतत फलन है तथा (a, b) पर अवकलनीय

है। तब, (a, b) में कम से कम एक बिंदु c ऐसा है कि $f'(c) = \dfrac{f(b) \quad f(a)}{b \quad a}$ होता है।

ज्यामितीय रूप से, माध्य मान प्रमेय यह कहती है कि (a, b) में न्यूनतम एक ऐसे बिंदु c का अस्तित्व है कि बिंदु $(c, f(c))$ पर स्पर्श रेखा बिंदुओं $(a, f(a)$ और $(b, f(b))$ को मिलाने वाली रेखाखंड के समांतर होती है।

5.2 हल उदाहरण

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 अचर k का मान ज्ञात कीजिए ताकि फलन f , $x = 0$ पर संतत हो, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 4x}{8x^2}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$ है।

हल यह दिया है कि फलन $f, x = 0$ पर संतत है। अत:, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ है।

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 4x}{8x^2} = k$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 2x}{8x^2} = k$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = k$$

$$\Rightarrow \qquad k = 1$$

अत:, यदि $f, x = 0$ पर संतत है, तो k का मान 1 होगा।

उदाहरण 2 फलन $f(x) = \sin x \, . \cos x$ के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

हल क्योंकि $\sin x$ और $\cos x$ संतत फलन हैं तथा दो संतत फलनों का गुणनफल एक संतत फलन होता है, इसलिए $f(x) = \sin x \, . \cos x$ एक संतत फलन है।

उदाहरण 3 यदि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}, & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases}$ $x = 2$ पर संतत है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल $f(2) = k$ दिया है।

अब, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+5)(x-2)^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2}(x+5) = 7$$

क्योंकि $x = 2$ पर f संतत है, इसलिए हमें प्राप्त होता है:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

$\Rightarrow$ $k = 7$

उदाहरण 4 दर्शाइए कि $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f, $x = 0$ पर संतत है।

हल $x = 0$ पर, वाम पक्ष की सीमा नीचे दिए अनुसार प्राप्त होती है-

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x\sin\frac{1}{x} = 0 \qquad \left[\text{क्योंकि } -1 < \sin\frac{1}{x} < 1\right]$$

इसी प्रकार, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ है। साथ ही, $f(0) = 0$ है।

इस प्रकार, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ है। अतः, $x = 0$ पर फलन f संतत है।

उदाहरण 5 $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ दिया है। संयोजित फलन $y = f\,[f(x)]$ में असंतत के बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि फलन $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ बिंदु $x = 1$ पर असंतत है।

अब $x \neq 1$ के लिए,

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{x-1} - 1} = \frac{x-1}{2-x}$$

जो $x = 2$ पर असंतत है।

अतः वाँछित असंतत बिंदु $x = 1$ और $x = 2$ हैं।

उदाहरण 6 मान लीजिए कि सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए, $f(x) = x|x|$ तो। $x = 0$ पर, $f(x)$ की अवकलजता की चर्चा कीजिए।

हल हम f को पुनः निम्नलिखित रूप में लिख सकते है: $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ यदि } x \geq 0 \\ -x^2, \text{ यदि } x < 0 \end{cases}$

अब, $\mathrm{L} f'(0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-h^2 - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} h = 0$

तथा $\mathrm{R} f'(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h^2 - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} h = 0$

क्योंकि वाम अवकलज और दक्षिण अवकलज दोनों बराबर हैं अतः $x = 0$ पर f अवकलनीय है।

उदाहरण 7 $\sqrt{\tan \sqrt{x}}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल मान लीजिए कि $y = \sqrt{\tan \sqrt{x}}$ है। श्रृंखला नियम का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{1}{2\sqrt{\tan \sqrt{x}}} \cdot \frac{d}{dx}(\tan \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan \sqrt{x}}} \cdot \sec^2 \sqrt{x} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan \sqrt{x}}} (\sec^2 \sqrt{x}) \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sec^2 \sqrt{x})}{4\sqrt{x}\sqrt{\tan \sqrt{x}}}$$

उदाहरण 8 यदि $y = \tan(x + y)$ है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल $y = \tan(x + y)$ दिया है। दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dy}{dx} \quad \sec^2(x \quad y) \frac{d}{dx}(x \quad y)$$

$$= \sec^2(x + y) \quad 1 \quad \frac{dy}{dx}$$

या $\quad [1 - \sec^2 (x + y] \dfrac{dy}{dx} = \sec^2 (x + y)$

अतः, $\quad \dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{\sec^2 (x \quad y)}{1 \quad \sec^2 (x \quad y)} = -\operatorname{cosec}^2 (x + y)$

उदाहरण 9 यदि $e^x + e^y = e^{x+y}$ दिया है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = -e^{y-x}$ है।

हल $e^x + e^y = e^{x+y}$ दिया है। दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$e^x + e^y \frac{dy}{dx} = e^{x+y} \quad 1 \quad \frac{dy}{dx} \qquad \text{या} \qquad (e^y - e^{x+y}) \frac{dy}{dx} = e^{x+y} - e^x$$

जिसके फलस्वरूप $\quad \dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{e^{x \quad y} - e^x}{e^y \quad e^{x \quad y}} \quad \dfrac{e^x \quad e^y \quad e^x}{e^y \quad e^x \quad e^y} \quad -e^{y \quad x}$.

उदाहरण 10 यदि $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right), -\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल $x = \tan$ रखिए, जहाँ $\dfrac{-\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{6}$

अतः $\quad y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right)$

$= \tan^{-1} (\tan 3 \quad)$

$= 3 \qquad\qquad$ (क्योंकि $\dfrac{}{2} \quad 3 \quad \dfrac{}{2}$)

$= 3\tan^{-1} x$

इसलिए, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{1 \quad x^2}$.

उदाहरण 11 यदि $y = \sin^{-1} \quad x\sqrt{1 \quad x} \quad \sqrt{x}\sqrt{1 \quad x^2}$ और $0 < x < 1$ है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है: $y = \sin^{-1} \quad x\sqrt{1 \quad x} \quad \sqrt{x}\sqrt{1 \quad x^2}$ है, जहाँ $0 < x < 1$

$x = \sin A$ और $\sqrt{x} = \sin B$ रखने पर:

$$y = \sin^{-1} \quad \sin A\sqrt{1 \quad \sin^2 B} \quad \sin B\sqrt{1 \quad \sin^2 A}$$

$$= \sin^{-1} \quad \sin A \cos B \quad \sin B \cos A$$

$$= \sin^{-1} \quad \sin(A \quad B) \quad = A - B$$

इस प्रकार, $\qquad y = \sin^{-1} x - \quad \sin^{-1} \sqrt{x}$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{1}{\sqrt{1 \quad x^2}} \quad \frac{1}{\sqrt{1 \quad \sqrt{x}^{\,2}}} . \frac{d}{dx} \quad \sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 \quad x^2}} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1 \quad x}}$$

उदाहरण 12 यदि $x = a \sec^3 \quad$ और $y = a \tan^3 \quad$ है, तो $\quad \overline{\;3\;}$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल हमें $x = a \sec^3 \quad$ और $y = a \tan^3 \quad$ प्राप्त है।

के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dx}{d} \quad 3a\sec^2 \quad \frac{d}{d}(\sec \quad) \quad 3a\sec^3 \quad \tan$$

तथा $\qquad \frac{dy}{d\theta} = 3a\tan^2\theta\frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = 3a\tan^2\theta\sec^2\theta$

इस प्रकार, $\frac{dy}{dx} \quad \frac{\frac{dy}{d}}{\frac{dx}{d}} \quad \frac{3a\tan^2 \quad \sec^2}{3a\sec^3 \quad \tan} \quad \frac{\tan}{\sec} \quad \sin$

अतः, $\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)$ at $\theta \; \frac{\pi}{3}$ पर $= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण 13 यदि $x^y = e^{x-y}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 \quad \log x)^2}$

हल हमें प्राप्त है: $x^y = e^{x-y}$ दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$y \log x = x - y$$

$\Rightarrow \qquad y\,(1 + \log x) = x$

अर्थात् $\qquad y = \dfrac{x}{1 \quad \log x}$ दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{(1 \quad \log x).1 \quad x \quad \frac{1}{x}}{(1 \quad \log x)^2} \quad \frac{\log x}{(1 \quad \log x)^2}$$

उदाहरण 14 यदि $y = \tan x + \sec x$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\cos x}{(1 \quad \sin x)^2}$ है।

हल हमें प्राप्त है: $y = \tan x + \sec x$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sec x \tan x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \quad \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 \quad \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$

इस प्रकार, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-\sin x}$ अब, x के सापेक्ष पुनः अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{- \; -\cos x}{(1-\sin x)^2} \quad \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

उदाहरण 15 यदि $f(x) = |\cos x|$ है, तो $f' \quad \dfrac{3}{4}$ ज्ञात कीजिए।

हल जब $\dfrac{}{2} < x < \pi$ तो $\cos x < 0$, जिससे $|\cos x| = -\cos x$, अर्थात् $f(x) = -\cos x$ है।

$f'(x) = \sin x$

अतः $f' \quad \dfrac{3}{4} = \sin \quad \dfrac{3}{4} \quad = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

उदाहरण 16 यदि $f(x) = |\cos x - \sin x|$ है, तो $f' \quad \dfrac{}{6}$ ज्ञात कीजिए।

हल जब $0 < x < \frac{\pi}{4}$ है, तो $\cos x > \sin x$ होता है, जिससे $\cos x - \sin x > 0$ है, अर्थात् $f\ (x) = \cos x - \sin x$ है।

$$f'\ (x) = -\sin x - \cos x$$

अतः $f' \quad \frac{}{6} \quad = -\sin\frac{}{6} \; - \cos\frac{}{6} \; = \; -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ है।

उदाहरण 17 $0, \frac{}{2}$ में फलन $f\,(x) = \sin 2x$ के लिए रोले के प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

हल $0, \frac{}{2}$ में फलन $f\,(x) = \sin 2x$ पर विचार कीजिए। ध्यान दीजिए कि:

(i) $0, \frac{}{2}$ में फलन f संतत है, क्योंकि f एक साइन (sine) फलन है, जो सदैव संतत होता है।

(ii) $0, \frac{}{2}$ में $f'\,(x) = 2\cos 2x$ का अस्तित्व है। अतः, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में f अवकलनीय है।

(iii) $f\,(0) = \sin 0 = 0$ है तथा $f \quad \frac{}{2} \quad = \sin\pi = 0$ है। इससे $f\,(0) = f \quad \frac{}{2}$ है।

यहाँ रोले के प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट हो जाते हैं। अतः, कम से कम एक ऐसे बिन्दु $c \in \quad 0, \frac{}{2}$ का अस्तित्व है ताकि $f'(c) = 0$ है। इस प्रकार,

$$2\cos 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad 2c = \frac{}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{}{4}$$

उदाहरण 18 [3, 5] में फलन $f\,(x) = (x-3)\,(x-6)\,(x-9)$ के लिए माध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

हल (i) [3, 5] में फलन f संतत है, क्योंकि बहुपद फलनों का गुणनफल एक बहुपद है, जो संतत है।

(ii) (3, 5) में $f'(x) = 3x^2 - 36x + 99$ का अस्तित्व है। अतः, यहाँ (3, 5) में अवकलनीय है। इस प्रकार, माध्यमान प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट हो जाते हैं। अतः कम से कम एक ऐसे बिंदु $c \in (3, 5)$ के लिए–

$$f\ \ (c) \quad \frac{f\,(5) \quad f\,(3)}{5 \quad 3}$$

$$\Rightarrow 3c^2 - 36c + 99 = \frac{8 \quad 0}{2} = 4$$

$$\Rightarrow c = \quad 6 \quad \sqrt{\frac{13}{3}}$$

अतः, $c \quad 6 \quad \sqrt{\frac{13}{3}}$ (क्योंकि दूसरा मान अमान्य है।)

दीर्घ उत्तरीय उदाहरण (L.A.)

उदाहरण 19 यदि $f(x) = \frac{\sqrt{2}\cos x \quad 1}{\cot x \quad 1}, x \quad \frac{}{4}$ है, तो $f \quad \frac{}{4}$ का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि $x = \frac{}{4}$ पर $f(x)$ संतत बन जाए।

हल दिया है $f(x) = \frac{\sqrt{2}\cos x \quad 1}{\cot x \quad 1}, x \quad \frac{}{4}$

अतः,
$$\lim_{x \quad \frac{}{4}} f(x) \quad \lim_{x \quad \frac{}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x \quad 1}{\cot x \quad 1}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \quad \frac{}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x \quad 1}{\sqrt{2}\cos x \quad 1} \cdot \frac{\sqrt{2}\cos x \quad 1}{\cos x \quad \sin x} \cdot \frac{\cos x \quad \sin x}{\cos x \quad \sin x} . \sin x$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}\cos x + 1} (\sin x)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos 2x} \cdot \left(\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right) (\sin x)$$

$$= \lim_{x \quad \frac{}{4}} \frac{\cos x \quad \sin x}{\sqrt{2}\cos x \quad 1} \sin x$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 1} \quad \frac{1}{2}$$

इस प्रकार, $\lim\limits_{x \quad \overline{4}} f(x) \quad \frac{1}{2}$ यदि हम $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ परिभाषित करें, तो $\frac{x}{4}$ पर $f(x)$ संतत बन जाएगा।

अतः, f के $x = \frac{\pi}{4}$ पर संतत होने के लिए $f \quad \overline{4} \quad \frac{1}{2}$ है।

उदाहरण 20 दर्शाइए कि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ द्वारा दिया जाने वाला फलन f बिंदु $x = 0$ पर असंतत है।

हल $x = 0$ पर :

$$\lim_{x \quad 0} f(x) \quad \lim_{x \quad 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \quad 1}{e^{\frac{1}{x}} \quad 1} \quad \frac{0 \quad 1}{0 \quad 1} \quad 1$$

इसी प्रकार,
$$\lim_{x \quad 0} f(x) \quad \lim_{x \quad 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \quad 1}{e^{\frac{1}{x}} \quad 1}$$

$$= \lim_{x \quad 0} \frac{1 \quad \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{1 \quad \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} = \lim_{x \quad 0} \frac{1 \quad e^{\frac{1}{x}}}{1 \quad e^{\frac{1}{x}}} \quad \frac{1 \quad 0}{1 \quad 0} \quad 1$$

इस प्रकार, $\lim\limits_{x \quad 0} f(x) \quad \lim\limits_{x \quad 0} f(x)$, है। अतः, $\lim\limits_{x \quad 0} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है। इसीलिए, $x = 0$ पर f असंतत है।

उदाहरण 21 मान लीजिए कि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}, & \text{यदि } x<0 \\ a & , \text{ यदि } x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{16+\sqrt{x}}-4}, & if\ x>0 \end{cases}$ है।

a के किस मान के लिए $x = 0$ पर f संतत है?

हल यहाँ $f(0) = a$ है तथा 0 पर f की वाम सीमा है:

$$\lim_{x \quad 0} f(x) \quad \lim_{x \quad 0} \frac{1 \quad \cos 4x}{x^2} \qquad \lim_{x \quad 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2}$$

$$\lim_{2x \quad 0} 8 \quad \frac{\sin 2x}{2x} \quad ^{2} = 8\,(1)^2 = 8$$

तथा 0 पर f की दक्षिण सीमा है:

$$\lim_{x \quad 0} f(x) \quad \lim_{x \quad 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{16 \quad \sqrt{x}} \quad 4}$$

$$= \lim_{x \quad 0} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{16 \quad \sqrt{x}} \quad 4)}{(\sqrt{16 \quad \sqrt{x}} \quad 4)(\sqrt{16 \quad \sqrt{x}} \quad 4)}$$

$$= \lim_{x \quad 0} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{16 \quad \sqrt{x}} \quad 4)}{16 \quad \sqrt{x} \quad 16} \quad \lim_{x \quad 0} \sqrt{16 \quad \sqrt{x}} \quad 4 \quad 8$$

इस प्रकार, $\lim_{x \quad 0} f(x) \quad \lim_{x \quad 0} f(x) \quad 8$ है। अतः, $x = 0$ पर f केवल तभी संतत होगा जब $a = 8$ हो।

उदाहरण 22 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{यदि } -3 \le x < -2 \\ x+1 & , \text{ यदि } -2 \le x < 0 \\ x+2 & , \text{ यदि } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन की अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

हल $f(x)$ की अवकलनीयता के संदेहास्पद बिंदु केवल $x = -2$ और $x = 0$ हैं।
$x = -2$ पर अवलनीयता के लिए:

अब, $\mathrm{L}f'(-2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(-2+h)+3-(-2+1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \to 0} 2 = 2$$

तथा $\mathrm{R}f'(-2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2+h+1-(-2+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h-1-(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

इस प्रकार, $\mathrm{R}f'(-2) \neq \mathrm{L}f'(-2)$ है। अतः, $x = -2$ पर, f अवकलनीय नहीं है।
इसी प्रकार, $x = 0$ पर फलन की अवकलनीयता के लिए, हमें

$$\mathrm{L}(f'(0)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0+h+1-(0+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h-1}{h} = \lim_{h \to 0} \left(1 - \frac{1}{h}\right)$$

जिसका अस्तित्व नहीं है। अतः, $x = 0$ पर फलन अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण 23 $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ को अवकलित कीजिए, जहाँ $x \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ है।

हल मान लीजिए कि $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ और $v = \cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ है।

हम $\dfrac{du}{dv} \quad \dfrac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$ ज्ञात करना चाहते हैं।

अब $u = \tan^{-1} \quad \dfrac{\sqrt{1 \quad x^2}}{x}$ में $x = \sin\theta$ रखिए, जहाँ $\left(\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ है।

तब, $u = \tan^{-1} \quad \dfrac{\sqrt{1 \quad \sin^2}}{\sin} \quad = \tan^{-1} (\cot \theta)$

$$= \tan^{-1} \left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \frac{\quad}{2} \quad \sin^{-1} x$$

अतः, $\quad \dfrac{du}{dx} \quad \dfrac{1}{\sqrt{1 \quad x^2}}$ होगा।

अब $\quad v = \cos^{-1} (2x \sqrt{1 \quad x^2})$

या, $\quad v = \dfrac{\quad}{2} - \sin^{-1} (2x \sqrt{1 \quad x^2})$; $x = \sin v$ रखने पर:

$$= \frac{\quad}{2} - \sin^{-1} (2\sin\theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta}) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} (\sin 2\theta)$$

$= \dfrac{\quad}{2} - \sin^{-1} (\sin (\pi - 2\theta))$ [क्योंकि $\dfrac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$]

$$= \frac{\quad}{2} \quad (\quad 2 \;) \quad \frac{\quad}{2} \quad 2$$

अतः $\quad v = \dfrac{\quad}{2} + 2\sin^{-1}x$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dv}{dx} \quad \dfrac{2}{\sqrt{1 \quad x^2}}$

अतः $$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{-1}{2}.$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरणों 24 से 35 तक प्रत्येक में, दिए हुए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

उदाहरण 24 यदि फलन $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + \cos x, & \text{यदि } x \neq 0 \\ k, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ बिंदु $x = 0$ पर संतत है, तो k का मान है

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 1.5

हल (B) सही उत्तर है।

उदाहरण 25 फलन $f(x) = [x]$, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को व्यक्त करता है, निम्नलिखित पर संतत है

(A) 4 (B) – 2 (C) 1 (D) 1.5

हल (D) सही उत्तर है। महत्तम पूर्णांक फलन $[x]$, x के सभी पूर्णांकीय मानों पर असंतत है। अतः, D सही उत्तर है।

उदाहरण 26 उन बिंदुओं की संख्या, जिन पर फलन $f(x) = \dfrac{1}{x-[x]}$ संतत नहीं है,

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D)इनमें से कोई नहीं

हल (D) सही उत्तर है। क्योंकि जब x एक पूर्णांक है, तो $x - [x] = 0$ है, इसलिए दिया हुआ फलन सभी $x \in \mathbf{Z}$ के लिए असंतत है।

उदाहरण 27 $f(x) = \tan x$ द्वारा दिए जाने वाला फलन निम्नलिखित समुच्चय पर असंतत है

(A) $n \ :n \ \ \mathbf{Z}$ (B) $2n \ :n \ \ \mathbf{Z}$ (C) $(2n \ \ 1)\frac{}{2} : n \ \ \mathbf{Z}$ (D) $\frac{n}{2} : n \ \ \mathbf{Z}$

हल (C) सही उत्तर है।

उदाहरण 28 मान लीजिए कि $f(x) = |\cos x|$ है। जब,

(A) f प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय है

(B) f प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु $x = n\pi$, $n \ \ \mathbf{Z}$ पर अवकलनीय नहीं है

(C) f प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ पर अवकलनीय नहीं है

(D) इनमें से कोई नहीं

हल (C) सही उत्तर है।

उदाहरण 29 फलन $f(x) = |x| + |x-1|$

(A) $x = 0$ तथा $x = 1$ दोनों पर संतत है (B) $x = 1$ पर संतत है, परंतु $x = 0$ पर संतत नहीं है

(C) $x = 0$ तथा $x = 1$ दोनों पर असंतत है (D) $x = 0$ पर संतत है, परंतु $x = 1$ पर संतत नहीं है

हल: सही उत्तर (A) है।

उदाहरण 30 k का वह मान, जो $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ k, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन को $x = 0$ पर संतत बना दे,

(A) 8 (B) 1 (C) -1 (D) इनमें से कोई नहीं

हल (D) सही उत्तर है। नि:संदेह, $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 31 उन बिंदुओं का सम्मुच्चय, जहाँ $f(x) = |x-3| \cos x$ द्वारा दिया जाने वाला फलन अवकलनीय है,

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\mathbf{R} - \{3\}$ (C) $(0, \infty)$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल (B) सही उत्तर है।

उदाहरण 32 x के सापेक्ष $\sec(\tan^{-1}x)$ का अवकल गुणांक है

(A) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (B) $\frac{x}{1+x^2}$ (C) $x\sqrt{1+x^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

हल (A) सही उत्तर है।

उदाहरण 33 यदि $u = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ और $v = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ है, तो $\frac{du}{dv}$ है

(A) $\frac{1}{2}$ (B) x (C) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (D) 1

हल (D) सही उत्तर है।

उदाहरण 34 फलन $f(x) = e^x \sin x,\ x \in [0, \pi]$ के लिए, रोले के प्रमेय में c का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

हल (D) सही उत्तर है।

उदाहरण 35 फलन $f(x) = x(x-2),\ x \in [1, 2]$ के लिए, माध्य मान प्रमेय में c का मान है

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

हल (A) सही उत्तर है।

उदाहरण 36 निम्नलिखित का सुमेलन कीजिए-

स्तंभ I	**स्तंभ II**
(A) यदि फलन $f(x) \quad \begin{matrix} \frac{\sin 3x}{x}, \text{ यदि } x \quad 0 \\ \frac{k}{2}, \text{ यदि } x \quad 0 \end{matrix}$ $x = 0$ पर संतत है, तो k बराबर है	(a) $\lvert x \rvert$
(B) प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है	(b) सत्य
(C) एक फलन का उदाहरण, जो प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु ठीक एक स्थान पर अवकलनीय नहीं है	(c) 6
(D) तत्समक फलन, अर्थात, $f(x) = x \ \forall x \in \mathbf{R}$ एक संतत फलन है	(d) असत्य

हल $A \to c,\ B \to d,\quad C \to a,\ D \to b$

उदाहरणों 37 से 41 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए-

उदाहरण 37 उन बिंदुओं की संख्या, जहाँ फलन $f(x) = \frac{1}{\log |x|}$ असंतत है, _________ है।

हल दिया हुआ फलन $x = 0, \pm 1$ बिंदुओं पर असंतत है। अतः, असंततता के बिंदुओं की वाँछित संख्या 3 है।

उदाहरण 38 यदि $f(x) = \begin{cases} ax + 1 \text{ if } x \geq 1 \\ x + 2 \text{ if } x < 1 \end{cases}$ संतत है, तो a ________ के बराबर मान होना चाहिए।

हल $a = 2$

उदाहरण 39 x के सापेक्ष $\log_{10} x$ का अवकलज _________ है।

हल $(\log_{10} e)\dfrac{1}{x}$

उदाहरण 40 यदि $y = \sec^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$ है, तो $\dfrac{dy}{dx} =$ ______ है।

हल 0

उदाहरण 41 $\cos x$ के सापेक्ष $\sin x$ का अवकलज ________ है।

हल $-\cot x$

उदाहरण 42 से 46 तक प्रत्येक में बताइए कि कथन सत्य है या असत्य –

उदाहरण 42 $x = a$, पर $f(x)$ संततता के लिए? $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ और $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ में से प्रत्येक $f(a)$ के बराबर होता है।

हल सत्य

उदाहरण 43 $y = |x-1|$ एक संतत फलन है।

हल सत्य

उदाहरण 44 एक संतत फलन में कुछ ऐसे बिंदु हो सकते हैं जहाँ सीमाओं का अस्तित्व न हों।

हल असत्य

उदाहरण 45 $|\sin x|$ चर x के प्रत्येक मान के लिए एक अवकलनीय फलन है।

हल असत्य

उदाहरण 46 $\cos |x|$ प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय है।

हल सत्य

5.3 प्रश्नावली

संक्षिप्त उत्तर (S.A.)

1. फलन $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ को $x = 1$ पर संततता की जाँच कीजिए।

ज्ञात कीजिए कि प्रश्न 2 से 10 तक में दिए फलनों में से कौन से फलन इंगित बिंदुओं पर संतत या असंतत हैं:

2. $x=2$ पर $f(x) \quad \begin{matrix} 3x \;\; 5, & \text{यदि } x \;\; 2 \\ x^2, & \text{यदि } x \;\; 2 \end{matrix}$ **3.** $x=0$ पर $f(x) \quad \begin{matrix} \dfrac{1 \;\; \cos 2x}{x^2}, & \text{यदि } x \;\; 0 \\ 5, & \text{यदि } x \;\; 0 \end{matrix}$

4. $x = 2$ पर $f(x) \quad \begin{matrix} \dfrac{2x^2 \quad 3x \quad 2}{x \quad 2}, & \text{यदि } x \quad 2 \\ 5, & \text{यदि } x \quad 2 \end{matrix}$

5. $x = 4$ पर $f(x) \quad \begin{matrix} \dfrac{|x \quad 4|}{2(x \quad 4)}, & \text{यदि } x \quad 4 \\ 0, & \text{यदि } x \quad 4 \end{matrix}$

6. $x = 0$ पर $f(x) \quad \begin{matrix} |x|\cos\dfrac{1}{x}, & \text{यदि } x \quad 0 \\ 0, & \text{यदि } x \quad 0 \end{matrix}$

7. $x = a$ पर $f(x) \quad \begin{matrix} |x \quad a|\sin\dfrac{1}{x \quad a}, & \text{यदि } x \quad 0 \\ 0, & \text{यदि } x \quad a \end{matrix}$

8. $x = 0$ पर $f(x) \quad \begin{matrix} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1 \quad e^{\frac{1}{x}}}, & \text{यदि } x \quad 0 \\ 0, & \text{यदि } x \quad 0 \end{matrix}$

9. $x = 1$ पर $f(x) \quad \begin{matrix} \dfrac{x^2}{2}, & \text{यदि } 0 \quad x \quad 1 \\ 2x^2 \quad 3x \quad \dfrac{3}{2}, & \text{यदि } 1 \quad x \quad 2 \end{matrix}$

10. $x = 1$ पर $(x) = |x| + |x - 1|$

प्रश्न 11 से 14 तक प्रत्येक में k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए फलन इंगित बिंदु पर संतत है:

11. $x=5$ पर $f(x)=\begin{cases} 3x-8, & \text{यदि } x\le 5 \\ 2k\ , & \text{यदि } x>5 \end{cases}$

12. $x=2$ पर $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-16}, & \text{यदि } x\ne 2 \\ k\ , & \text{यदि } x=2 \end{cases}$

13. $x = 0$ पर $f(x) \quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 \quad kx} \quad \sqrt{1 \quad kx}}{x}, & \text{यदि } \ 1 \quad x \quad 0 \\ \dfrac{2x \quad 1}{x \quad 1} & \text{, यदि } 0 \quad x \quad 1 \end{cases}$

14. $x = 0$ पर $f(x) \quad \begin{cases} \dfrac{1 \quad \cos kx}{x\sin x}, & \text{यदि } x \quad 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{, यदि } x \quad 0 \end{cases}$

15. सिद्ध कीजिए कि $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|+2x^2}, & x\ne 0 \\ k & x=0 \end{cases}$ से परिभाषित फलन f बिंदु $x=0$ पर असंतत रहता है, चाहे k का कोई भी मान लिया जाए।

16. a और b के मान ज्ञात कीजिए जिसके लिये दिया हुआ फलन

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-4}{|x-4|}+a\ , & \text{यदि } x<4 \\ a+b, & \text{यदि } x=4 \\ \dfrac{x-4}{|x-4|}+b\ , & \text{यदि } x>4 \end{cases}$$

बिंदु $x = 4$ पर संतत है।

17. फलन $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ दिया है। संयोजित फलन $y=f(f(x))$ में असंतत्य के बिंदु ज्ञात कीजिए।

18. फलन $f(t)=\dfrac{1}{t^2+t-2}$ की असंततता के सभी बिंदु ज्ञात कीजिए, जहाँ $t=\dfrac{1}{x-1}$ है।

19. दर्शाइए कि फलन $f(x) = |\sin x + \cos x|$ बिंदु $x = \pi$ पर संतत है।

प्रश्न 20 से 22 में, f की अवकलनीयता की जाँच कीजिए जब कि f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है–

20. $x = 2$ पर, $f(x) = \begin{matrix} x[x], & \text{यदि } 0 \quad x \quad 2 \\ (x \quad 1)x, & \text{यदि } 2 \quad x \quad 3 \end{matrix}$

21. $x = 0$ पर, $f(x) = \begin{matrix} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & , \text{यदि } x \quad 0 \\ 0 & , \text{यदि } x \quad 0 \end{matrix}$

22. $x = 2$ पर, $f(x) = \begin{matrix} 1 \quad x & , \text{यदि } x \quad 2 \\ 5 \quad x & , \text{यदि } x \quad 2 \end{matrix}$

23. दर्शाइए कि $x = 5$ पर, $f(x) = |x - 5|$ संतत है, परंतु अवकलनीय नहीं है।

24. एक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ सभी $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x) \neq 0$ के लिए समीकरण $f(x+y) = f(x) f(y)$ को संतुष्ट करता है। मान लीजिए कि यह फलन $x = 0$ पर अवकलनीय है तथा $f'(0) = 2$ है। सिद्ध कीजिए कि $f'(x) = 2f(x)$ है।

निम्नलिखित प्रश्न 25 से 43 तक प्रत्येक को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए–

25. $2^{\cos^2 x}$ **26.** $\dfrac{8^x}{x^8}$ **27.** $\log\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$

28. $\log\left[\log\left(\log x^5\right)\right]$ **29.** $\sin\sqrt{x} + \cos^2\sqrt{x}$ **30.** $\sin^n(ax^2 + bx + c)$

31. $\cos\left(\tan\sqrt{x+1}\right)$ **32.** $\sin x^2 + \sin^2 x + \sin^2(x^2)$ **33.** $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

34. $(\sin x)^{\cos x}$ **35.** $\sin^m x \, . \, \cos^n x$ **36.** $(x+1)^2 (x+2)^3 (x+3)^4$

37. $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right), \dfrac{-\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ **38.** $\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}\right), -\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$

39. $\tan^{-1}(\sec x + \tan x), -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

40. $\tan^{-1}\left(\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right), -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ तथा $\dfrac{a}{b}\tan x > -1$

41. $\sec^{-1}\left(\dfrac{1}{4x^3 - 3x}\right), 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

42. $\tan^{-1} \quad \dfrac{3a^2x \quad x^3}{a^3 \quad 3ax^2} \quad , \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \dfrac{x}{a} \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

43. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right), -1<x<1, x\neq 0$

प्रश्न 44 से 48 तक प्राचलिक रूप में दिये फलनों में से प्रत्येक के लिए $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कजिए –

44. $x = t + \dfrac{1}{t},\ y = t - \dfrac{1}{t}$

45. $x = e^{q}\left(\theta + \dfrac{1}{\theta}\right),\ y = e^{-\theta}\left(\theta - \dfrac{1}{\theta}\right)$

46. $x = 3\cos q - 2\cos^3 q,\ \ y = 3\sin q - 2\sin^3 q$

47. $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\quad \tan y = \dfrac{2t}{1-t^2}$

48. $x = \dfrac{1+\log t}{t^2},\quad y = \dfrac{3+2\log t}{t}$

49. यदि $x = e^{\cos 2t}$ और $y = e^{\sin 2t}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y\log x}{x\log y}$ है।

50. यदि $x = a\sin 2t\ (1 + \cos 2t)$ और $y = b\cos 2t\ (1 - \cos 2t)$ तो दर्शाइए कि ,

$x = \dfrac{\pi}{4}$ पर; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$

51. यदि $x = 3\sin t - \sin 3t$ और $y = 3\cos t - \cos 3t$ तो $t = \dfrac{\pi}{3}$ पर $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

52. $\sin x$ के सापेक्ष $\dfrac{x}{\sin x}$ को अवकलित कीजिए।

53. $\tan^{-1} x$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ को अवकलित कीजिए, जब $x \neq 0$.

प्रश्न 54 से 57 तक प्रत्येक में $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जबकि x और y दिये हुए संबंध से संयोजित हैं

54. $\sin(xy) + \frac{x}{y} = x^2 - y$ **55.** $\sec(x + y) = xy$

56. $\tan^{-1}(x^2 + y^2) = a$ **57.** $(x^2 + y^2)^2 = xy$

58. यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$

59. यदि $x=e^{\frac{x}{y}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x\log x}$

60. यदि $y^x=e^{y-x}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\log y)^2}{\log y}$

61. यदि $y=(\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)\ldots\ldots\infty}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\tan x}{y\log\cos x-1}$

62. यदि $x\sin(a+y)+\sin a\cos(a+y)=0$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

63. यदि $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

64. यदि $y=\tan^{-1}x$ तो केवल y के पदों में $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 65 से 69 तक दिये फलनों में से प्रत्येक के लिए रोले के प्रमेय का सत्यापन कीजिए–

65. $[0, 1]$ में $f(x) = x(x-1)^2$ **66.** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ esa $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

67. $[-1, 1]$ में $f(x) = \log(x^2+2) - \log 3$ **68.** $[-3, 0]$ में $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$

69. $[-2, 2]$ में $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

70. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{यदि } 0\le x\le 1\\ 3-x, & \text{यदि } 1\le x\le 2\end{cases}$ द्वारा दिए जाने वाले फलन पर रोले के प्रमेय की अनुप्रयोगता पर चर्चा कीजिए।

71. $[0, 2p]$ में वक्र $y = (\cos x - 1)$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहाँ स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है।

72. रोले के प्रमेय का प्रयोग करते हुए वक्र $y = x\,(x - 4)$, x Î $[0, 4]$ पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है।

प्रश्न 73 से 76 तक दिये हुए फलनों में से प्रत्येक के लिए माध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिए–

73. $[1, 4]$ में $f(x) = \dfrac{1}{4x-1}$

74. $[0, 1]$ में $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$

75. $[0, p]$ में $f(x) = \sin x - \sin 2x$

76. $[1, 5]$ में $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

77. वक्र $y = (x - 3)^2$ पर एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जिस पर स्पर्श रेखा $(3, 0)$ और $(4, 1)$ बिंदुओं को मिलाने वाली जीवा के समांतर हो।

78. माध्य मान प्रमेय का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि वक्र $y = 2x^2 - 5x + 3$ पर एक ऐसा बिंदु है जो $A(1, 0)$ और $B(2, 1)$ बिंदुओं के बीच स्थित है तथा उस पर खींची गयी स्पर्श रेखा जीवा AB के समांतर है। साथ ही, वह बिंदु भी ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

79. p और q के ऐसे मान ज्ञात कीजिए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + p, & \text{यदि } x \le 1 \\ qx + 2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$

बिंदु $x = 1$ पर अवकलनीय हो।

80. यदि $x^m . y^n = (x + y)^{m+n}$ है तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ और (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

81. यदि $x = \sin t$ और $y = \sin pt$ है तो सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + p^2y = 0$ है।

82. यदि $y = x^{\tan x} + \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$ है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 83 से 96 तक प्रत्येक में से दिये हुए चारों विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए–

83. यदि $f(x) = 2x$ और $g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ है तो निम्नलिखित में से कौन - सा फलन असंतत हो सकता है?

(A) $f(x) + g(x)$ (B) $f(x) - g(x)$ (C) $f(x) \cdot g(x)$ (D) $\frac{g(x)}{f(x)}$

84. फलन $f(x) = \frac{4-x^2}{4x-x^3}$

(A) केवल एक बिंदु पर असंतत है (B) ठीक दो बिंदुओं पर असंतत है

(C) ठीक तीन बिंदुओं पर असंतत है (D) इनमें से कोई नहीं

85. बिंदुओं का वह समुच्चय, जहाँ $f(x) = |2x-1| \sin x$ से दिये जाना वाला फलन f अवकलनीय है, निम्नलिखित है

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (C) $(0, \infty)$ (D) इनमें से कोई नहीं

86. फलन $f(x) = \cot x$ निम्नलिखित समुच्चय पर असंतत है

(A) $\{x = n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$ (B) $\{x = 2n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$

(C) $\left\{x = (2n+1)\frac{\pi}{2} ; n \in \mathbf{Z}\right\}$ (D) $\left\{x = \frac{n\pi}{2} ; n \in \mathbf{Z}\right\}$

87. फलन $f(x) = e^{|x|}$

(A) प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है

(B) प्रत्येक स्थान पर संतत और अवकलनीय है

(C) $x = 0$ पर संतत नहीं है

(D) इनमें से कोई नहीं

88. यदि $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$] जहाँ $x \neq 0$ तो $x = 0$ पर फलन f का मान निम्नलिखित होगा यदि यह फलन $x = 0$ संतत है

(A) 0 (B) – 1 (C) 1 (D)इनमें से कोई नहीं

89. यदि $f(x) = \begin{cases} mx+1 & ,\text{यदि } x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x + n, & \text{यदि } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ बिंदु $x = \dfrac{\pi}{2}$ पर संतत है तो

(A) $m = 1, n = 0$ (B) $m = \dfrac{n\pi}{2} + 1$ (C) $n = \dfrac{m\pi}{2}$ (D) $m = n = \dfrac{\pi}{2}$

90. मान लीजिए $f(x) = |\sin x|$ है, तब

(A) f प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय है

(B) f प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$ पर अवकलनीय नहीं है

(C) f प्रत्येक स्थान पर संतत है परंतु $x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$ पर अवकलनीय नहीं है

(D) इनमें से कोई नहीं

91. यदि $y = \log\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ तो $\dfrac{dy}{dx}$ बराबर है

(A) $\dfrac{4x^3}{1-x^4}$ (B) $\dfrac{-4x}{1-x^4}$ (C) $\dfrac{1}{4-x^4}$ (D) $\dfrac{-4x^3}{1-x^4}$

92. यदि $y = \sqrt{\sin x + y}$ है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ बराबर है

(A) $\dfrac{\cos x}{2y-1}$ (B) $\dfrac{\cos x}{1-2y}$ (C) $\dfrac{\sin x}{1-2y}$ (D) $\dfrac{\sin x}{2y-1}$

93. $\cos^{-1}x$ के सापेक्ष $\cos^{-1}(2x^2 - 1)$ का अवकलज है

(A) 2 (B) $\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\dfrac{2}{x}$ (D) $1 - x^2$

94. यदि $x = t^2$ और $y = t^3$ है, तो $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ है

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{3}{4t}$ (C) $\dfrac{3}{2t}$ (D) $\dfrac{3}{2t}$

95. अंतराल $[0, \sqrt{3}\,]$ में फलन $f(x) = x^3 - 3x$ के लिए, रोले के प्रमेय में c का मान है

(A) 1 (B) -1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

96. फलन $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in [1, 3]$ के लिए, माध्य मान प्रमेय में c का मान है

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

प्रश्न संख्या 97 से 101 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए–

97. एक ऐसे फलन का उदाहरण जो सभी स्थानों पर संतत है, परंतु ठीक दो बिंदुओं पर अवकलनीय रहने में असमर्थ रहता है __________ है।

98. x^3 के सापेक्ष x^2 अवकलज __________ है।

99. यदि $f(x) = |\cos x|$ तो $f' \;\frac{\;}{4} \;=$ ________

100. यदि $f(x) = |\cos x - \sin x|$ है तो $f' \;\frac{\;}{3} \;=$ ________

101. वक्र $\sqrt{x} \quad \sqrt{y} \quad 1$ के लिए, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ पर $\frac{dy}{dx}$ __________

प्रश्न संख्या 102 से 106 तक प्रत्येक में दिए हुए कथन के लिए बताइए कि यह सत्य है या असत्य–

102. $[0, 2]$ में फलन $f(x) = |x - 1|$ के लिए, रोले का प्रमेय प्रयुक्त है।

103. यदि f अपने प्राँत D पर संतत है, तो $|f|$ भी D पर संतत होगा।

104. दो संतत फलनों का संयोजन एक संतत फलन होता है।

105. त्रिकोणमितीय एवं त्रिकोणमितीय व्युत्क्रम फलन अपने-अपने प्राँतों में अवकलनीय होते हैं।

106. यदि $f.g$ बिंदु $x = a$ पर संतत है, तो f और g बिंदु $x = a$ पर पृथक-पृथक रूप से संतत होते हैं।

अध्याय 6

अवकलज के अनुप्रयोग

6.1 समग्र अवलोकन (Overview)

6.1.1 राशियों के परिवर्तन की दर

फलन $y = f(x)$ के लिए $\frac{d}{dx}(f(x))$, x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को निरूपित करता है।

अत: यदि s दूरी तथा t समय को व्यक्त करते हैं तो $\frac{ds}{dt}$, समय के सापेक्ष दूरी के परिवर्तन की दर को व्यक्त करता है।

6.1.2 स्पर्श रेखाएँ तथा अभिलंब

किसी वक्र $y = f(x)$ को बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श करने वाली रेखा को उस बिंदु पर वक्र की स्पर्श रेखा कहते हैं तथा इसका समीकरण $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}(x - x_1)$ होता है।

स्पर्श रेखा के स्पर्श बिंदु पर लंब रेखा को वक्र अभिलंब कहते हैं तथा इसका समीकरण

$y - y_1 = \dfrac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}(x - x_1)$ होता है। दो वक्रों के बीच का प्रतिच्छेद कोण वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदु पर उनकी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण होता है।

6.1.3 सन्निकटन

क्योंकि $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, इसलिए हम कह सकते हैं कि $f'(x)$ लगभग (approximately) $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ के बराबर है।

$\Rightarrow$ $f(x + \Delta x)$ का सन्निकट मान $= f(x) + \Delta x . f'(x)$

6.1.4 *वर्धमान/ह्रासमान फलन*

किसी अंतराल (a, b) में एक संतत फलन $f(x)$:

(i) निरंतर वर्धमान है, यदि सभी $x_1, x_2 \in (a, b)$ के लिए $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ विकल्पत: सभी $x \in (a, b)$, के लिए $f'(x) > 0$

(ii) निरंतर ह्रासमान है, यदि सभी $x_1, x_2 \in (a, b)$, के लिए $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ विकल्पत: सभी $x \in (a, b)$, के लिए $f'(x) < 0$

6.1.5 ***प्रमेय:*** मान लीजिए कि फलन f, अंतराल $[a, b]$ पर संतत तथा अंतराल (a, b) में अवकलनीय है, तो

(i) $[a, b]$ में f वर्धमान है, यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$

(ii) $[a, b]$ में f ह्रासमान है, यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) < 0$

(iii) $[a, b]$ में f एक अचर फलन है, यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) = 0$

6.1.6 *उच्चिष्ठ एंव निम्निष्ठ*

किसी वास्तविक फलन f का स्थानीय उच्चिष्ठ स्थानीय निम्निष्ठ

किसी फलन f के प्रांत के अंतस्थ (भीतर) स्थित बिंदु c को

(i) स्थानीय उच्चिष्ठ कहते हैं, यदि एक ऐसे $h > 0$ का अस्तित्व है कि $(c - h, c + h)$ में स्थित सभी x के लिए $f(c) > f(x)$

$f(c)$ के इस मान को f का स्थानीय उच्चतम मान कहते हैं।

(ii) स्थानीय निम्निष्ठ कहते हैं, यदि एक ऐसे $h > 0$ का अस्तित्व है कि $(c - h, c + h)$ में स्थित सभी x के लिए $f(c) < f(x)$

$f(c)$ के इस मान को f का स्थानीय निम्नतम मान कहते हैं।

अंतराल $[a, b]$ में परिभाषित फलन $f(x)$, $x = c$, जहाँ $c \in [a, b]$, पर उच्चिष्ठ (या निरपेक्ष उच्चिष्ठ) कहा जाता है, यदि सभी $x \in [a, b]$ के लिए $f(x) \leq f(c)$

इसी प्रकार अंतराल $[a, b]$ में परिभाषित फलन $f(x)$, $x = d$, जहाँ $d \in [a, b]$ पर निम्निष्ठ (या निरपेक्ष निम्निष्ठ) कहा जाता है, यदि सभी $x \in [a, b]$ के लिए $f(x) \geq f(d)$

6.1.7 ***f का क्रांतिक बिंदु*** : किसी फलन f के प्रांत में एक बिंदु c, जिस पर या तो $f'(c) = 0$ या f अवकलनीय नहीं है, f का क्रांतिक बिंदु कहलाता है।

स्थानीय उच्चतम अथवा स्थानीय मान निम्नतम ज्ञात करने की व्यावहारिक विधि

(a) **प्रथम अवकलज परीक्षण**

(i) x के बिंदु c से होकर बढ़ने पर यदि $f'(x)$ का चिह्न धन से ऋण में परिवर्तित होता है, तो c स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है तथा $f(c)$ स्थानीय उच्चतम मान है।

(ii) x के बिंदु c से होकर बढ़ने पर यदि $f'(x)$ का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है, तो c स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु है तथा $f(c)$ स्थानीय निम्नतम मान है।

(iii) x के बिंदु c से होकर बढ़ने पर यदि $f'(x)$ का चिह्न परिवर्तित नहीं होता है, तो c न तो स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु है और न स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु है। इस प्रकार के बिंदु को नति परिवर्तन बिंदु कहते हैं।

(b) **द्वितीय अवकलज परीक्षण**

मान लीजिए कि f किसी अंतराल I में परिभषित एक फलन है तथा $c \in$ I मान लीजिए कि f, c पर दो बार अवकलनीय है। तब

(i) यदि $f'(c) = 0$ तथा $f''(c) < 0$, तो $x = c$ स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है। इस दशा में f का स्थानीय उच्चतम मान $f(c)$ है।

(ii) यदि $f'(c) = 0$ तथा $f''(c) > 0$, तो $x = c$ स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु है। इस दशा में f का स्थानीय निम्नतम मान $f(c)$ हैं।

(iii) यदि $f'(c) = 0$ तथा $f''(c) = 0$, तो यह परीक्षण असफल हो जाता है। ऐसी स्थिति में, हम पुनः प्रथम अवकलज परीक्षण पर वापस जाते हैं।

6.1.8 *निरपेक्ष उच्चिष्ठ तथा/ अथवा निरपेक्ष निम्निष्ठ ज्ञात करने की व्यावहारिक विधि*

चरण 1 : प्रदत्त अंतराल में f के सभी क्रांतिक बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

चरण 2 : इन सभी बिंदुओं पर तथा अंतराल के अंत्य बिंदुओं पर f के मान का परिकलन कीजिए।

चरण 3 : चरण 2 में परिकलित मानों में से f के उच्चतम तथा निम्नतम मानों को लीजिए। उच्चतम मान f का निरपेक्ष उच्चतम मान तथा निम्नतम मान f का निरपेक्ष निम्नतम मान होगा।

6.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

उदाहरण 1 वक्र $y = 5x - 2x^3$ के लिए, यदि x में 2 इकाई/से. की दर से वृद्धि हो रही है, तो $x = 3$ पर वक्र का प्रावण्य कितनी तीव्रता से परिवर्तित हो रहा है?

हल वक्र का प्रावण्य $= \dfrac{dy}{dx} = 5 - 6x^2$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -12x\,\frac{dx}{dt}$$

$$= -12\,.\,(3)\,.\,(2)$$

$$= -72 \text{ इकाई/से.}$$

अत: जब x में इकाई/से. की दर से वृद्धि हो रही है, तब वक्र की प्रवणता 72 इकाई/से. की दर से घट रही हैं।

उदाहरण 2 $\dfrac{\pi}{4}$ अर्ध शीर्ष कोण वाले एक शांकवीय कीप (funnel) से, जिसका शीर्ष नीचे की ओर है, कीप के पृष्ठ के क्षेत्रफल में 2 cm^2/sec की समान दर से उसके शीर्ष के एक छिद्र से पानी बह रहा है। पानी के सतह की तिर्यक ऊँचाई के घटने की दर उस समय ज्ञात कीजिए जब उसकी तिर्यक ऊँचाई 4cm है।

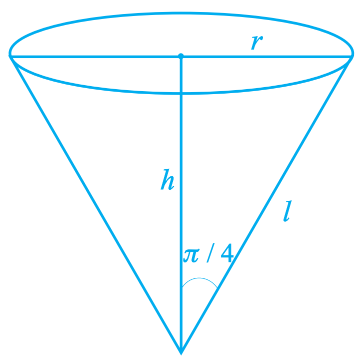
हल यदि s वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल को निरुपित करता है,

तो $\dfrac{ds}{dt} = 2\text{cm}^2 \text{ /sec}$

$$s = \pi\, rl = \pi\,(l\sin\frac{\pi}{4})l = \frac{\pi}{\sqrt{2}}l^2$$

इसलिए, $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}l\,\dfrac{dl}{dt} = \sqrt{2}\pi l\,\dfrac{dl}{dt}$

जब l = 4 cm, $\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi.4}.2 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\pi} = \dfrac{\sqrt{2}}{4\pi}$ cm/s .



आकृति 6.1

उदाहरण 3 वक्र $y^2 = x$ तथा $x^2 = y$ के बीच का प्रतिच्छेद – कोण ज्ञात कीजिए।

हल प्रदत्त समीकरणों को सरल करने पर, हमें प्राप्त होता है कि $y^2 = x$ तथा $x^2 = y \Rightarrow x^4 = x$ अथवा $x^4 - x = 0$

$\Rightarrow \qquad x\,(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

इसलिए, $\qquad y = 0,\ y = 1$

अर्थात (0, 0) तथा (1, 1) प्रतिच्छेद बिंदु हैं।

पुनः $y^2 = x \quad \Rightarrow \qquad 2y\dfrac{dy}{dx} = 1 \qquad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$

तथा $x^2 = y \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x$

बिंदु (0, 0), पर वक्र $y^2 = x$ की स्पर्श रेखा y-अक्ष के समांतर है तथा वक्र $x^2 = y$ की स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है।

$\Rightarrow$ प्रतिच्छेद – कोण $= \dfrac{\pi}{2}$

बिंदु (1, 1) पर वक्र $y_2 = x$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता (m_1) $\dfrac{1}{2}$ है तथा वक्र $x^2 = y$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता 2 है।

अतएव $\tan\theta = \left|\dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+1}\right| = \dfrac{3}{4} \qquad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)$

उदाहरण 4 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \tan x - 4x$, अंतराल $\left(\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

हल $f(x) = \tan x - 4x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x - 4$

जब $\dfrac{-\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3}$, $1 < \sec x < 2$

इसलिए, $1 < \sec^2 x < 4 \Rightarrow -3 < (\sec^2 x - 4) < 0$

अतः $\frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ के लिए $f'(x) < 0$

इसलिए $\left(\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ में $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है।

उदाहरण 5 निर्धारित कीजिए कि x के किन मानों के लिए, फलन $y = x^4 - \frac{4x^3}{3}$ वर्धमान है तथा किन मानों के लिए, यह ह्रासमान है।

हल $y = x^4 - \frac{4x^3}{3}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2 (x - 1)$

अब, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1.$

क्योंकि $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ के लिए $f'(x) < 0$ तथा f अंतराल $[-\infty, 0]$ और $(0, 1)$ में संतत है, इसलिए f अंतराल $(-\infty, 1]$ में ह्रासमान है और f अंतराल $[1, \infty)$ में वर्धमान है।

टिप्पणी यहाँ f अतंराल $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ में निरंतर ह्रासमान तथा $(1, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$ का कोई उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ नहीं है।

हल $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$

$f'(x) = 12x^2 - 36x + 27 = 3(4x^2 - 12x + 9) = 3(2x - 3)^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (क्रांतिक बिंदु)

क्योंकि सभी $x < \frac{3}{2}$ तथा सभी $x > \frac{3}{2}$ के लिए $f'(x) > 0$

अतः $x = \frac{3}{2}$ एक नति परिवर्तन का बिंदु है, और न तो उच्चिष्ठ का बिंदु और न निम्निष्ठ का बिंदु

$x = \frac{3}{2}$ केवल एक क्रांतिक बिंदु है तथा f का कोई उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ नहीं है।

उदाहरण 7 अवकलों के प्रयोग द्वारा $\sqrt{0.082}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $f(x) = \sqrt{x}$

$x = .09$ तथा $\Delta x = -0.008$ मान लेने पर

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x \,.\, f'(x)$ के प्रयोग द्वारा–

$f(0.09 - 0.008) = f(0.09) + (-0.008) f'(0.09)$

$$\Rightarrow \sqrt{0.082} = \sqrt{0.09} - 0.008 \,.\left(\frac{1}{2\sqrt{0.09}}\right) = 0.3 - \frac{0.008}{0.6}$$

$= 0.3 - 0.0133 = 0.2867$

उदाहरण 8 वक्रों $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा $xy = c^2$ के लम्बकोणीय प्रतिच्छेदन के लिए प्रतिबंध ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि वक्र (x_1, y_1) पर प्रतिच्छेद करते हैं।

इसलिए $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

$\Rightarrow$ प्रतिच्छेदन बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $(m_1) = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

पुनः $xy = c^2 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \Rightarrow m_2 = \frac{-y_1}{x_1}$

लंबकोणीय प्रतिच्छेदन के लिए, $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1$ या $a^2 - b^2 = 0$

उदाहरण 9 फलन $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - 8x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 105$ के सभी स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

हल $f'(x) = -3x^3 - 24x^2 - 45x$

$= -3x(x^2 + 8x + 15) = -3x(x+5)(x+3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -5,\ x = -3,\ x = 0$

$f''(x) = -9x^2 - 48x - 45$

$= -3(3x^2 + 16x + 15)$

$f''(0) = -45 < 0$. इसलिए $x = 0$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदु है।

$f''(-3) = 18 > 0$. इसलिए $x = -3$ स्थानीय निम्निष्ठ बिंदु है।

$f''(-5) = -30 < 0$. इसलिए $x = -5$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदु है।

उदाहरण 10 सिद्ध कीजिए कि $x + \frac{1}{x}$ का स्थानीय उच्चतम मान उसके स्थानीय निम्नतम मान से कम है।

हल मान लीजिए कि $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{2}{x^3}$, इसलिए $\frac{d^2y}{dx^2}$ ($x = 1$ पर) > 0 तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ ($x = -1$ पर) < 0

अतः y का स्थानीय उच्चतम मान $x = -1$ पर है तथा स्थानीय उच्चतम मान $= -2$

y का स्थानीय निम्नतम मान $x = 1$ पर है तथा स्थानीय निम्नतम मान $= 2$

अतः स्थानीय उच्चतम मान (–2) स्थानीय निम्नतम मान (2) से कम है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 11 किसी शांकवीय बर्तन के शीर्ष के एक छोटे छिद्र से, जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है, पानी 1 cu cm/sec की दर से बह रहा है। बर्तन में पानी के सतह की तिर्यक ऊँचाई के घटने की दर उस समय ज्ञात कीजिए जब तिर्यक ऊँचाई 4 cm है। शांकवीय बर्तन का शीर्ष कोण $\frac{\pi}{6}$ है।

हल दिया हुआ है कि $\frac{dv}{dt} = 1 \text{ cm}^3\text{/s}$, जहाँ v शांकवीय बर्तन में पानी का आयतन है।

आकृति 6.2 से, $l = 4\text{cm}, \;\; h = l \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$

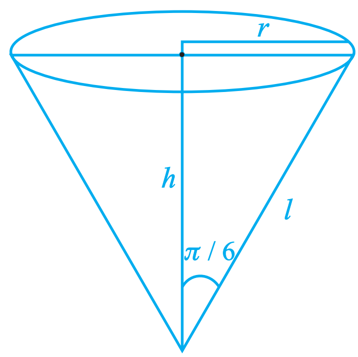
तथा $r = l\sin\frac{\pi}{6} = \frac{l}{2}$

इसलिए $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\ }{3}\,\frac{l^2}{4}\,\frac{\sqrt{3}}{2}l \quad \frac{\sqrt{3}}{24}l^3$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{8}l^2\frac{dl}{dt}$$

इसलिए, $1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}16.\frac{dl}{dt}$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dl}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi}\text{cm/s.}$$



आकृति 6.2

अतः तिर्यक ऊँचाई के घटने की दर $= \frac{1}{2\sqrt{3}\pi}$ cm/s

उदाहरण 12 वक्र $y = \cos(x + y), -2\pi \le x \le 2\pi$, की उन सभी स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 2y = 0$ के समांतर हैं।

हल दिया हुआ है कि $y = \cos(x + y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(x + y)\left[1 + \frac{dy}{dx}\right]$ ...(i)

या $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$$

क्योंकि स्पर्श रेखा $x + 2y = 0$ के समांतर है, इसलिए स्पर्श रेखा की प्रवणता $= -\frac{1}{2}$

इसलिए, $$-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x+y) = 1 \qquad \text{.... (ii)}$$

क्योंकि $\cos(x + y) = y$ तथा $\sin(x + y) = 1 \Rightarrow \cos^2(x + y) + \sin^2(x + y) = y^2 + 1$

$\Rightarrow \qquad 1 = y^2 + 1$ या $y = 0$

इसलिए $\cos x = 0$

इसलिए $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2...$

अतः, $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$, परंतु $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{-3\pi}{2}$ समीकरण (ii) को संतुष्ट करते हैं।

अतः $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right)$ उपयुक्त बिंदु है।

इस प्रकार $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ या $2x + 4y - \pi = 0$?

तथा $\left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ या $2x + 4y + 3\pi = 0$

उदाहरण 13 वक्र $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4by$ का प्रतिच्छेद कोण ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ है कि $y^2 = 4ax$...(i) तथा $x^2 = 4by$... (ii). हल करने पर

$$\left(\frac{x^2}{4b}\right)^2 = 4ax \Rightarrow x^4 = 64\, ab^2 x$$

या $x\,(x^3 - 64\,ab^2) = 0 \Rightarrow x = 0,\; x = 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$

अतः (0, 0) तथा $\left(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}, 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)$ प्रतिच्छेद –बिंदु हैं।

पुनः, $y^2 = 4ax \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4a}{2y} = \dfrac{2a}{y}$ तथा $x^2 = 4by \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{4b} = \dfrac{x}{2b}$

इसलिए, (0, 0) पर वक्र $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा y-अक्ष के समांतर है, तथा वक्र $x^2 = 4by$ की स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है।

$\Rightarrow$ वक्रों के बीच का कोण $= \dfrac{\pi}{2}$

$\left(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}, 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)$ पर, m_1 (वक्र (i) की स्पर्श रेखा की प्रवणता)

$= \dfrac{2a}{4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ तथा m_2 (वक्र (ii) की स्पर्श रेखा की प्रवणता) $= \dfrac{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{2b} = 2\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\text{इसलिए, } \tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}\right| = \frac{3a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}}{2\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$\text{अतः, } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}}{2\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)}\right)$$

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$ के किसी बिंदु पर अभिलंब का समीकरण $4(y\cos^3\theta - x\sin^3\theta) = 3\sin 4\theta$

हल यहाँ $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$

इसलिए $$\frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta = -3\sin\theta(1-\cos^2\theta) = -3\sin^3\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta = 3\cos\theta\ (1-\sin^2\theta) = 3\cos^3\theta$$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$. इसलिए, अभिलंब की प्रवणता $= \dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}$

अतः अभिलंब का समीकरण निम्नलिखित है,

$$y - (3\sin\theta - \sin^3\theta) = \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}[x - (3\cos\theta - \cos^3\theta)]$$

$$\Rightarrow\ y\cos^3\theta - 3\sin\theta\cos^3\theta + \sin^3\theta\cos^3\theta = x\sin^3\theta - 3\sin^3\theta\cos\theta + \sin^3\theta\cos^3\theta$$

$$\Rightarrow\ y\cos^3\theta - x\sin^3\theta = 3\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= \frac{3}{2}\sin 2\theta\ .\ \cos 2\theta$$

$$= \frac{3}{4}\sin 4\theta$$

या $\quad 4(y\cos^3\theta - x\sin^3\theta) = 3\sin 4\theta.$

उदाहरण 15 $f(x) = \sec x + \log\cos^2 x$, $0 < x < 2\pi$ का उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

हल $f(x) = \sec x + 2\log\cos x$

इसलिए, $f'(x) = \sec x\tan x - 2\tan x = \tan x(\sec x - 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \tan x = 0$ या $\sec x = 2$ या $\cos x = \frac{1}{2}$

अतः x क सम्भव मान $x = 0$, या $x = \pi$ तथा

$x = \frac{\pi}{3}$ या $x = \frac{5\pi}{3}$

पुनः, $f''(x) = \sec^2 x(\sec x - 2) + \tan x(\sec x \tan x)$

$= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x - 2\sec^2 x$

$= \sec x(\sec^2 x + \tan^2 x - 2\sec x)$

हम देखते हैं कि

$f''(0) = 1(1 + 0 - 2) = -1 < 0$. इसलिए, $x = 0$ एक उच्चिष्ठ बिंदु है।

$f''(\pi) = -1(1 + 0 + 2) = -3 < 0$. इसलिए, $x = \pi$ एक उच्चिष्ठ बिंदु है।

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2(4 + 3 - 4) = 6 > 0$. इसलिए, $x = \frac{\pi}{3}$ एक निम्नष्ठ बिंदु है।

$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2(4 + 3 - 4) = 6 > 0$. इसलिए, $x = \frac{5\pi}{3}$ एक निम्नष्ठ बिंदु है।

y का $x = 0$ पर उच्चतम मान $1 + 0 = 1$ है।

y का $x = \pi$ पर उच्चतम मान $-1 + 0 = -1$ है।

y का $x = \frac{\pi}{3}$ पर निम्नतम मान $2 + 2\log\frac{1}{2} = 2(1 - \log 2)$ है।

y का $x = \frac{5\pi}{3}$ पर निम्नतम मान $2 + 2\log\frac{1}{2} = 2(1 - \log 2)$ है।

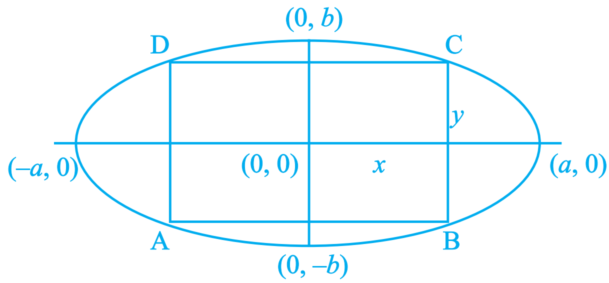
उदाहरण 16 उस महत्तम आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अंतर्गत स्थित है।

हल जैसा कि आकृति 6.3 में प्रदर्शित है, मान लीजिए कि ABCD महत्तम क्षेत्रफल का आयत है

जिसकी भुजा AB = 2x तथा BC = 2y, जहाँ C (x, y) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर स्थित एक बिंदु है।

आयत का क्षेत्रफल A, 4xy है। अर्थात् A = 4xy, जिससे $A^2 = 16x^2y^2 = s$ (मान लिया)

इसलिए, $s = 16x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2$



आकृति 6.3

$$= \frac{16b^2}{a^2}\ (a^2x^2 - x^4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{dx} = \frac{16b^2}{a^2}\ [2a^2x - 4x^3]$$

पुनः $\frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow x =$

$\frac{a}{\sqrt{2}}$ तथा $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$

अब $\quad \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{16b^2}{a^2}[2a^2 - 12x^2]$

अतः $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ पर, $\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{16b^2}{a^2}[2a^2 - 6a^2] = \frac{16b^2}{a^2}\ (-4a^2) < 0$

अतः $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ पर, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$, यहाँ s महत्तम है अतएव A भी महत्तम है।

महत्तम क्षेत्रफल A = 4.x.y = $4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}}$ = $2ab$ वर्ग इकाई

उदाहरण 17 अंतराल $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में फलन $f(x) = \sin 2x - x$, के उच्चतम तथा निम्नितम मानों का अंतर ज्ञात कीजिए।

हल $\quad f(x) = \sin 2x - x$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = 2\cos 2x - 1$$

इसलिए $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x$ is $\frac{-\pi}{3}$ या $\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$ या $\frac{\pi}{6}$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

स्पष्टतया, $\frac{\pi}{2}$ उच्चतम मान है तथा $-\frac{\pi}{2}$ निम्नतम मान है।

अतः अभीष्ट अंतर $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

उदाहरण 18 शीर्ष कोण 2θ वाला एक समद्विबाहु त्रिभुज a त्रिज्या वाले किसी वृत्त के अंतर्गत स्थित है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल उच्चतम है। जब $\theta = \frac{\pi}{6}$

हल मान लीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC त्रिज्या a वाले किसी वृत्त के अंतर्गत है, इस प्रकार कि AB = AC

AD = AO + OD = $a + a\cos 2\theta$ तथा BC = 2BD
$= 2a\sin 2\theta$ (आकृति 6.4 देखिए)

इसलिए, Δ ABC का क्षेत्रफल, अर्थात् $\Delta = \frac{1}{2}$ BC . AD

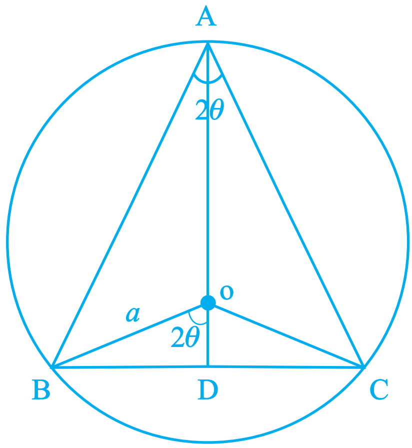
$$= \frac{1}{2} 2a \sin 2\theta \,.\, (a + a \cos 2\theta)$$

$$= a^2 \sin 2\theta \,(1 + \cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta = a^2 \sin 2\theta + \frac{1}{2} a^2 \sin 4\theta$$

इसलिए, $\dfrac{d\Delta}{d\theta} = 2a^2 \cos 2\theta + 2a^2 \cos 4\theta$

$$= 2a^2(\cos 2\theta + \cos 4\theta)$$



आकृति 6.4

$$\frac{d\Delta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = -\cos 4\theta = \cos(\pi - 4\theta)$$

इसलिए, $2\theta = \pi - 4\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$

$$\frac{d^2\Delta}{d\theta^2} = 2a^2 \,(-2\sin 2\theta - 4\sin 4\theta) < 0 \; \left(\theta = \frac{\pi}{6} \text{ पर}\right)$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल उच्चतम है, जब $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

निम्नलिखित उदाहरण संख्या 19 से 23 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

उदाहरण 19 वक्र $3y = 6x - 5x^3$ पर स्थित उस बिंदु का भुज, जिस पर वक्र का अभिलंब मूल बिंदु से होकर जाता है।

(A) 1 (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) 2 (D) $\dfrac{1}{2}$ है।

हल मान लीजिए कि वक्र $3y = 6x - 5x^3$ पर (x_1, y_1) वह बिंदु है, जिस पर अभिलंब मूल बिंदु

से होकर जाता है। तब $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 2 - 5x_1^2$ पुनः (x_1, y_1) पर मूल बिंदु से जाने वाले अभिलंब से हम प्राप्त करते हैं $2 - 5x_1^2 = \frac{-x_1}{y_1} = \frac{-3}{6 - 5x_1^2}$

क्योंकि $x_1 = 1$, इस समीकरण को संतुष्ट करता है, इसलिए सही उत्तर (A) है।

उदाहरण 20 दो वक्र $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ तथा $3x^2y - y^3 = 2$

(A) एक दूसरे को स्पर्श करते हैं।

(B) समकोण पर काटते हैं।

(C) $\frac{\pi}{3}$ कोण पर काटते हैं।

(D) $\frac{\pi}{4}$ कोण पर काटते हैं।

हल पहले वक्र के समीकरण से, $3x^2 - 3y^2 - 6xy \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = (m_1)$ मान लिया तथा दूसरे वक्र के समीकरण से

$6xy + 3x^2 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2} = (m_2)$ मान लिया

क्योंकि $m_1 . m_2 = -1$. इसलिए सही उत्तर (B) है।

उदाहरण 21 समीकरण $x = e^t . \cos t, y = e^t . \sin t$ द्वारा प्रदत्त वक्र की $t = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा, x-अक्ष से कोण बनाती है।

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

हल $\frac{dx}{dt} = -e^t . \sin t + e^t \cos t, \ \frac{dy}{dt} = e^t \cos t + e^t \sin t$

इसलिए $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t} = \dfrac{\sqrt{2}}{0}$ अतः सही उत्तर (D) है।

उदाहरण 22 वक्र $y = \sin x$ के बिंदु (0, 0) पर अभिलंब का समीकरण:

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x - y = 0$ है।

हल $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$. इसलिए अभिलम्ब की प्रवणता $= \left(\dfrac{-1}{\cos x}\right)_{x=0} = -1$. अतः अभिलंब का समीकरण $y - 0 = -1(x - 0)$ या $x + y = 0$ है।

अतः सही उत्तर (C) है।

उदाहरण 23 वक्र $y^2 = x$ पर वह बिंदु जहाँ स्पर्श रेखा x-अक्ष से $\dfrac{\pi}{4}$ कोण बनाती है।

(A) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ (B) $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ (C) (4, 2) (D) (1, 1) है।

हल $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y} = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$

इसलिए सही उत्तर B है।

निम्नलिखित उदाहरणों 24 से 29 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

उदाहरण 24 a के वे मान जिनके लिए $y = x^2 + ax + 25$ x-अक्ष को स्पर्श करता है,______है।

हल $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + a = 0$, अर्थात्, $x = -\dfrac{a}{2}$,

इसलिए, $\dfrac{a^2}{4} + a\left(-\dfrac{a}{2}\right) + 25 = 0 \Rightarrow a = \pm 10$

उदाहरण 25 यदि $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 + 2x + 1}$, तो इसका उच्चतम मान ________है।

हल f के उच्चतम होने के लिए $4x^2 + 2x + 1$ को निम्नतम होना चाहिए, अर्थात्,

$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)$ जिससे $4x^2 + 2x + 1$ का निम्नतम मान $= \frac{3}{4}$ मिलता है।

अतः f का उच्चतम मान $= \frac{4}{3}$

उदाहरण 26 मान लीजिए कि c पर f का द्वितीय अवकलज है, इस प्रकार कि $f'(c) = 0$ तथा $f''(c) > 0$, तो c पर फलन _______ है।

हल c पर फलन स्थानीय निम्नलिखित है।

उदाहरण 27 यदि $f(x) = \sin x$ तो अंतराल $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में f का निम्निष्ठ मान______ है।

हल -1

उदाहरण 28 $\sin x + \cos x$ का उच्चिष्ठ मान ______ है।

हल $\sqrt{2}$.

उदाहरण 29 किसी गोले के आयतन के परिवर्तन की दर उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के सापेक्ष, जब उसकी त्रिज्या 2 cm है,_______ है।

हल 1 cm^3/cm^2

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = 4\pi r^2,\ s = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{ds}{dr} = 8\pi r \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{r}{2} = 1,\ r = 2 \text{ पर।}$$

6.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. नमक का एक गोलाकार गेंद पानी में इस प्रकार घुल रहा है कि किसी क्षण उसके आयतन के घटने की दर उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के समानुपाती है। सिद्ध कीजिए कि उसकी त्रिज्या एक अचर दर से घट रही है।

2. यदि किसी वृत्त का क्षेत्रफल एक समान दर से बढ़ता है, तो सिद्ध कीजिए कि उसका परिमाप (परिधि) उसकी त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती है।

3. एक पंतग 151.5 cm की ऊँचाई पर क्षैतिज दिशा में गतिमान है। यदि पतंग की चाल 10 m/s है, तो उसकी डोर को कितनी तेज़ी से छोड़ा जा रहा है, जब उसकी दूरी पतंग उड़ाने वाले लड़के से 250 m है? लड़के की ऊँचाई 1.5 m है।

4. एक दूसरे से 45° पर झुकी हुई दो सड़कों के संधि-स्थल से दो मनुष्य A तथा B, एक ही समय v वेग से चलना प्रारम्भ करते हैं। यदि वे अलग-अलग सड़कों पर चलते हैं तो उनके परस्पर एक दूसरे से अलग होने की दर ज्ञात कीजिए।

5. कोण $\theta, 0 < \theta < \frac{}{2}$, ज्ञात कीजिए जो अपने sine से दोगुनी तेजी से बढ़ता है।

6. $(1.999)^5$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

7. एक खोखले बेलनाकार खोल, जिसकी आंतरिक तथा बाह्य त्रिज्याएँ क्रमशः 3 cm तथा 3.0005 cm हैं, में धातु के आयतन का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

8. 2 m लंबा एक मनुष्य $1\frac{2}{3}$ m/s की दर से किसी बिजली के खंभे की ओर, जो जमीन से $5\frac{1}{3}$ m ऊपर है, चल रहा है। उसकी छाया का अग्रभाग किसी दर से गतिमान है? उसकी छाया की लंबाई, उस समय किस दर से परिवर्तित हो रही है, जब वह प्रकाश के स्रोत के आधार से $3\frac{1}{3}$ m दूर है?

9. किसी तरनताल को सफ़ाई के लिए खाली करना है। यदि ताल को बंद करने के t seconds बाद ताल में पानी की मात्रा, लिटर में, L से निरूपित होती है तथा $L = 200\,(10 - t)^2$, तो 5 seconds में अंत में पानी कितनी तेजी से बाहर निकल रहा है? प्रथम 5 seconds में पानी के बाहर निकलने की औसत दर क्या है?

10. किसी घन का आयतन एक अचर दर से बढ़ रहा है। सिद्ध कीजिए कि उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल की वृद्धि उसकी भुजा की व्युत्क्रमानुपाती है।

11. x तथा y दो वर्गों की भुजाएँ हैं, इस प्रकार कि $y = x - x^2$ दूसरे वर्ग के क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर पहले वर्ग के क्षेत्रफल के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।

12. वक्र $2x = y^2$ तथा $2xy = k$ के लंबकोणीय प्रतिच्छेद के लिए प्रतिबंध ज्ञात कीजिए।

13. सिद्ध कीजिए कि वक्र $xy = 4$ तथा $x^2 + y^2 = 8$, एक दूसरे को स्पर्श करते हैं।

14. वक्र $\sqrt{x} \quad \sqrt{y} = 4$ उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जिस पर स्पर्श रेखा का अक्षों से झुकाव समान है।

15. वक्र $y = 4 - x^2$ तथा $y = x^2$ का प्रतिच्छेद-कोण ज्ञात कीजिए।

16. सिद्ध कीजिए कि वक्र $y^2 = 4x$ तथा $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ एक दूसरे को बिंदु $(1, 2)$ पर स्पर्श करते हैं।

17. वक्र $3x^2 - y^2 = 8$ के उन अभिलम्ब रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $x + 3y = 4$ के समांतर हैं।

18. वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ के किन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ y-अक्ष के समांतर हैं।

19. सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} = 1$, वक्र $y = b \, . \, e^{\frac{-x}{a}}$ को उस बिंदु पर स्पर्श करती है जिस पर वक्र y-अक्ष को काटता है।

20. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x + \cot^{-1}x + \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$, $\mathbf{R}$ में वर्धमान फलन है।

21. सिद्ध कीजिए कि $a \quad 1$ के लिए $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x - 2ax + b$, $\mathbf{R}$ में ह्रासमान फलन है।

22. सिद्ध किजिए कि $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, अतंराल $\quad 0, \frac{}{4}$ में एक वर्धमान फलन है।

23. किस बिंदु पर, वक्र $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ की प्रवणता उच्चतम है? उच्चतम प्रवणता भी ज्ञात कीजिए।

24. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ का उच्चिष्ठ मान $x = \frac{}{6}$ पर है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

25. यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा तथा कर्ण की लंबाईयों का योगफल दिया हुआ है, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल उच्चतम है, जब उनके मध्य का कोण $\frac{}{3}$ है।

26. फलन $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ के स्थानीय उच्चिष्ठ, स्थानीय निम्निष्ठ तथा नति परिवर्तन के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए। साथ ही संगत स्थानीय उच्चतम तथा स्थानीय निम्नतम मानों को भी ज्ञात कीजिए।

27. किसी नगर में एक टेलीफोन कंपनी की सूची में 500 ग्राहक हैं और वह प्रत्येक ग्राहक से प्रति वर्ष 300 रु निश्चित शुल्क वसूलती हैं। कंपनी वार्षिक शुल्क बढ़ाना चाहती है, और ऐसा माना जाता है कि प्रत्येक 1रु की वृद्धि करने पर एक ग्राहक टेलीफोन सेवा लेना समाप्त कर देगा। ज्ञात कीजिए कि कितनी वृद्धि करने से महत्तम (उच्चतम) लाभ होगा।

28. यदि सरल रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ वक्र $\dfrac{x^2}{a^2} \quad \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करती है, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = p^2$

29. c^2 क्षेत्रफल के किसी दिए हुए गत्ते से वर्गाकार आधार का एक खुला हुआ बाक्स बनाना है। सिद्ध कीजिए कि बाक्स का महत्तम आयतन $\dfrac{c^3}{6\sqrt{3}}$ घन इकाई है।

30. 36 cm परिमाप वाले आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए जिसे उसकी भुजाओं में से किसी एक के चारों ओर घुमाने पर अधिक से अधिक सम्भव आयतन प्रसर्प (sweep) हो।

31. यदि किसी घन तथा गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का योगफल अचर है तो घन के एक कोर (edge) तथा गोले के व्यास का अनुपात उस समय क्या है जब उनके आयतन का योगफल निम्नतम है?

32. AB किसी वृत्त का एक व्यास है तथा C उसकी परिधि पर कोई बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि Δ ABC का क्षेत्रफल महत्तम उस समय होगा जब वह समद्विबाहु है।

33. वर्गाकार आधार तथा ऊर्ध्वाधर पृष्ठ वाले धातु के किसी बाक्स में 1024 cm^3 वस्तु आती है। शीर्ष तथा आधार के पृष्ठों के माल(वस्तु) का मूल्य Rs 5/cm^2 है तथा पृष्ठों के मान का मूल्य Rs 2.50/cm^2 है। बाक्स का निम्नतम मूल्य ज्ञात कीजिए।

34. भुजा x, $2x$ और $\dfrac{x}{3}$ के किसी आयताकार समांतर षट्फलक तथा एक गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का योगफल अचर दिया हुआ है। सिद्ध कीजिए कि उनके आयतन का योगफल निम्नतम होगा, यदि x गोले की त्रिज्या के तीन गुने के बराबर है। उनके आयतन के योगफल का निम्नतम मान भी ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 35 से 39 तक प्रत्येक में दिए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

35. किसी समबाहु त्रिभुज की भुजाएँ 2 cm/sec की दर से बढ़ रही हैं। जब भुजा 10 cm है, त्रिभुज का क्षेत्रफल

(A) 10 cm^2/s (B) $\sqrt{3}$ cm^2/s (C) $10\sqrt{3}$ cm^2/s (D) $\frac{10}{3}$ cm^2/s

की दर से बढ़ता है।

36. एक क्षैतिज फर्श पर 5 मीटर लंबी एक सीढ़ी किसी ऊर्ध्वाधर दीवार पर झुकी है। यदि सीढ़ी का ऊपरी सिरा 10 cm/sec, की दर से नीचे की ओर फिसल रहा है तो सीढ़ी तथा फर्श के बीच का कोण, उस समय जब सीढ़ी का निचला सिरा दीवार से 2 मीटर दूर है:

(A) $\frac{1}{10}$ radian/sec (B) $\frac{1}{20}$ radian/sec (C) 20 radian/sec (D) 10 radian/sec

37. बिंदु (0, 0) पर वक्र $y = x^{\frac{1}{5}}$ की

(A) एक ऊर्ध्वाधर स्पर्शी रेखा (y-अक्ष के समांतर)

(B) एक क्षैतिज स्पर्शी रेखा (x-अक्ष के समांतर)

(C) एक तिरछी स्पर्शी रेखा

(D) कोई भी स्पर्शी रेखा नहीं

38. रेखा $x + 3y = 8$ के समांतर, वक्र $3x^2 - y^2 = 8$ के अभिलंब का समीकरण है।

(A) $3x - y = 8$ (B) $3x + y + 8 = 0$

(C) $x + 3y \quad 8 = 0$ (D) $x + 3y = 0$

39. यदि वक्र $ay + x^2 = 7$ तथा $x^3 = y$, बिंदु (1, 1) पर लंबवत काटते हैं, तो a का मान है

(A) 1 (B) 0 (C) – 6 (D) .6

40. यदि $y = x^4 - 10$ तथा यदि x, 2 से 1.99 तक परिवर्तित होता है, तो y का परिवर्तन क्या (कितना) है,

(A) 0.32 (B) 0.032 (C) 5.68 (D) 5.968

41. वक्र $y(1 + x^2) = 2 - x$ के, उस बिंदु पर, जहाँ यह x-अक्ष को काटती है, स्पर्श रेखा का समीकरण

(A) $x + 5y = 2$ (B) $x - 5y = 2$ (C) $5x - y = 2$ (D) $5x + y = 2$ है।

42. वे बिंदु, जिन पर वक्र $y = x^3 - 12x + 18$ की स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समांतर हैं,

(A) (2, –2), (–2, –34) (B) (2, 34), (–2, 0)

(C) (0, 35), (–2, 0) (D) (2, 2), (–2, 34) है।

43. वक्र $y = e^{2x}$ की, बिंदु (0, 1) पर, स्पर्श रेखा x-अक्ष से बिंदु

(A) (0, 1) (B) $-\frac{1}{2}, 0$ (C) (2, 0) (D) (0, 2) पर मिलती है।

44. वक्र $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ की, बिंदु (2, –1) पर, स्पर्श रेखा की प्रवणता

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{-6}{7}$ (D) – 6 है।

45. दो वक्र $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ तथा $3x^2y - y^3 - 2 = 0$ किस कोण पर प्रतिच्छेद करते हैं:

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

46. वह अंतराल, जिसमें फलन $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 1$ ह्रासमान है

(A) [–1,) (B) [–2, –1] (C) (– , –2] (D) [–1, 1]

47. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + \cos x$ द्वारा परिभाषित है, तो f

(A) का $x = \pi$ पर एक निम्निष्ठ है (B) का $x = 0$ पर एक उच्चिष्ठ है

(C) एक ह्रासमान फलन है (D) एक वर्धमान फलन है

48. $y = x(x-3)^2$, x के नीचे दिए हुए मानों के लिए ह्रासमान है,

(A) $1 < x < 3$ (B) $x < 0$

(C) $x > 0$ (D) $0 < x < \frac{3}{2}$

49. फलन $f(x) = 4\sin^3 x - 6\sin^2 x + 12\sin x + 100$

(A) $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान है

(C) $\frac{-}{2}, \frac{}{2}$ में निरंतर ह्रासमान है (D) $0, \frac{}{2}$ में निरंतर ह्रासमान है

50. निम्नलिखित में से कौन-सा फलन $0, \frac{}{2}$ में ह्रासमान है

(A) $\sin 2x$ (B) $\tan x$ (C) $\cos x$ (D) $\cos 3x$

51. फलन $f(x) = \tan x - x$

(A) सदैव वर्धमान है (B) सदैव ह्रासमान है

(C) कभी भी वर्धमान नहीं है (D) कभी वर्धमान है कभी ह्रासमान है

52. यदि x एक वास्तविक संख्या है, तो $x^2 - 8x + 17$ का निम्नतम मान

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 है।

53. बहुपद $x^3 - 18x^2 + 96x$ का, अंतराल [0, 9] में, निम्नतम मान

(A) 126 (B) 0 (C) 135 (D) 160 है।

54. फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ के

(A) दो स्थानीय उच्चतम बिंदु हैं (B) दो स्थानीय निम्नतम बिंदु हैं

(C) एक उच्चतम तथा एक निम्नतम है (D) कोई भी उच्चतम या निम्नतम नहीं है

55. $\sin x \,.\, \cos x$ का उच्चतम मान है

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

56. $f(x) = 2 \sin 3x + 3 \cos 3x$ का मान $x = \frac{5}{6}$, पर

(A) उच्चतम (B) निम्नतम (C) शून्य (D) न तो उच्चतम और न निम्नतम है।

57. वक्र $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ की उच्चतम प्रवणता

(A) 0 (B) 12 (C) 16 (D) 32

58. $f(x) = x^x$ का स्तब्ध बिंदु है

(A) $x = e$ (B) $x = \frac{1}{e}$ (C) $x = 1$ (D) $x = \sqrt{e}$

59. $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ का उच्चतम मान है

(A) e (B) e^e (C) $e^{\frac{1}{e}}$ (D) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

प्रश्न 60 से 64 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

60. वक्र $y = 4x^2 + 2x - 8$ तथा $y = x^3 - x + 13$ एक दूसरे को बिंदु _____ पर स्पर्श करते हैं।

61. वक्र $y = \tan x$ के $(0, 0)$ पर अभिलंब का समीकरण _______ है।

62. a के वे मान जिनके लिए फलन $f(x) = \sin x - ax + b$, **R** में वर्धमान है______.हैं।

63. फलन $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$, $x > 0$, अंतराल ______ में ह्रासमान है।

64. फलन $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ $(a > 0, b > 0, x > 0)$ का निम्नतम मान______है।

अध्याय 7

समाकल

7.1 समग्र अवलोकन (Overview)

7.1.1 मान लीजिए कि $\frac{d}{dx}(\mathrm{F}(x)) = f(x)$ है। तब, हम $\int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ लिखते हैं। ये समाकल *अनिश्चित समाकल* या *व्यापक समाकल* कहलाते हैं। C समाकलन का *स्थिरांक* या *अचर* कहलाता है। इन सभी समाकलों का अंतर एक अचर होता है।

7.1.2 यदि दो फलनों का अंतर एक अचर हो तो उनका एक ही अवकलज होता है।

7.1.3 ज्यामितीय रूप से, कथन $\int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C} = y$ (मान लीजिए) वक्रों के एक कुल को निरूपित करता है। C के विभिन्न मान इस कुल के विभिन्न सदस्यों के संगत होते हैं तथा ये सभी सदस्य इन वक्रों में से किसी एक को स्वयं उसके समांतर स्थानांतरित करके प्राप्त किए जा सकते हैं। साथ ही, एक रेखा $x = a$ और इन वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदुओं पर वक्रों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।

7.1.4 *अनिश्चित समाकलों के कुछ गुण*

(i) अवकलन और समाकलन की प्रक्रियाएँ एक दूसरे की प्रतिलोम या विपरीत प्रक्रियाएँ होती है अर्थात, $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ और $\int f'(x)dx = f(x) + \mathrm{C}$ होता है, जहाँ C कोई स्वैच्छिक स्थिरांक या अचर है।

(ii) एक ही अवकलज वाले दो अनिश्चित समाकलों से वक्रों का एक ही कुल प्राप्त होता है और इसीलिए ये समतुल्य होते हैं। अत:, यदि f और g दो ऐसे फलन हैं कि $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}\int g(x)dx$ है, तो $\int f(x)dx$ और $\int g(x)dx$ समतुल्य होते हैं।

(iii) दो फलनों के योग का समाकल इन फलनों के समाकलों के योग के बराबर होता है। अर्थात्, $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ होता है।

(iv) एक अचर गुणक को समाकल चिन्ह के या तो पहले या बाद में लिखा जा सकता है। अर्थात्, $\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$ है, जहाँ a एक अचर है।

(v) गुणों (iii) और (iv) को फलनों $f_1, f_2, ..., f_n$ की एक परिमित संख्या तथा वास्तविक $k_1, k_2, ..., k_n$ संख्याओं के लिए व्यापीकृत किया जा सकता है, जिससे

$$\int (k_1 f_1(x) + k_2\, f_2(x) + ..., + k_n f_n(x))\, dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + ... + k_n \int f_n(x) dx$$

7.1.5 समाकलन की विधियाँ

समाकल ज्ञात करने के लिए कई विधियाँ या तकनीकें हैं, जहाँ हम फलन f का प्रतिअवकलज प्रत्यक्ष रूप से नहीं चुन सकते हैं। यहाँ हम इन्हें मानक रूपों में बदलते हैं। इनमें से कुछ विधियाँ निम्नलिखित पर आधारित हैं–

1. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन 2. आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन 3. खंडश: समाकलन

7.1.6 निश्चित समाकल

निश्चित समाकल को $\int_a^b f(x) dx$, से व्यक्त किया जाता है, जहाँ a समाकल की निम्न सीमा है तथा b समाकल की उच्च (या उपरि) सीमा है। निश्चित समाकल का मान निम्नलिखित दो विधियों से ज्ञात किया जाता है–

(i) योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल

(ii) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, यदि $f(x)$ फलन $f(x)$ का एक प्रति अवकलज है।

7.1.7 योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल

निश्चित समाकल $\int_a^b f(x) dx$ वक्र $y = f(x), (y > 0)$ कोटियों $x = a$ और $x = b$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल है, निम्न प्रकार लिखा जाता है:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f(a) + f(a+h) + ... + f(a+(n-1)h)\right]$$

अथवा

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} h\left[f(a) + f(a+h) + \ldots + f\left(a+(n-1)h\right)\right]$$

जहाँ $h = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ जब $n \to \infty$.

7.1.8 कलन की मूलभूत प्रमेय

(i) ***क्षेत्रफल फलन*** : फलन A (x) क्षेत्रफल फलन को व्यक्त करता है तथा इसे

$$\mathrm{A}(x) = \int_a^x f(x)dx$$

(ii) ***समाकलन की प्रथम मूलभूत प्रमेय***

मान लीजिए कि एक बंद अंतराल $[a, b]$ पर f एक सतत फलन है तथा मान लीजिए कि A (x) क्षेत्रफल फलन है। तब, सभी $x \in [a, b]$ के लिए, $\mathrm{A}'(x) = f(x)$ होता है।

(iii) ***समाकलन की द्वितीय मूलभूत प्रमेय***

मान लीजिए कि एक बंद अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित f एक सतत फलन है तथा F फलन f का एक प्रतिअवकलज है तब,

$$\int_a^b f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

7.1.9 निश्चित समाकलों के कुछ गुण

$$\mathrm{P}_0 : \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

$\mathrm{P}_1 : \displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, विशिष्ट रूप में, $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

$$\mathrm{P}_2 : \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \;;\; a < c < b$$

$$P_3 : \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

$$P_4 : \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

$$P_5 : \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

$$P_6 : \int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, \text{ यदि } f(2a-x)=f(x), \\ 0, \text{ यदि } f(2a-x)=-f(x). \end{cases}$$

P_7 : (i) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि f एक सम फलन है, अर्थात् $f(-x) = f(x)$

(ii) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, यदि f एक विषम फलन है, अर्थात्, $f(-x) = -f(x)$

7.2 हल किए हुए उदाहरण

संक्षिप्त उत्तर (S.A.)

उदाहरण 1 x के सापेक्ष $\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right)$ को समाकलित कीजिए।

हल $$\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$$

$$= \int 2a(x)^{\frac{-1}{2}}\,dx - \int bx^{-2}\,dx + \int 3c\,x^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9cx^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

उदाहरण 2 $\frac{3ax}{b^2 \quad c^2x^2}dx$ का मान निकालिए।

हल मान लीजिए कि $v = b^2 + c^2x^2$, तब $dv = 2c^2\, xdx$ है।

अतः,
$$\int \frac{3ax}{b^2+c^2x^2}dx = \frac{3a}{2c^2}\ \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{3a}{2c^2}\log|v| + c\frac{3a}{2c^2}\log\left|b^2+c^2x^2\right| + \mathrm{C}$$

उदाहरण 3 समाकलन की एक प्रतिअवकलज के रूप में अवधारणा का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित का सत्यापन कीजिए–

$$\int \frac{x^3}{x+1}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|x+1| + \mathrm{C}$$

हल
$$\frac{d}{dx}\ x - \frac{x^2}{2}\quad \frac{x^3}{3} - \log|x\quad 1|\quad \mathrm{C}$$

$$= 1 - \frac{2x}{2}\quad \frac{3x^2}{3} - \frac{1}{x\quad 1}$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{1}{x\quad 1} = \frac{x^2}{x+1}$$

इस प्रकार,
$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|x+1| + \mathrm{C}\right) = \int \frac{x^3}{x+1}dx$$

उदाहरण 4 $\sqrt{\dfrac{1\quad x}{1-x}}dx$, का मान निकालिए।

हल मान लीजिए कि $\mathrm{I} = \int\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}dx = \int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + \mathrm{I}_1$,

जहाँ $\mathrm{I}_1 = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ है।

$1 - x^2 = t^2$ रखिए, जिससे $-2x\,dx = 2t\,dt$ अतः,

$$\mathrm{I}_1 = - \quad dt = -t + \mathrm{C} = -\sqrt{1-x^2} \quad \mathrm{C}$$

अतः, $\quad \mathrm{I} = \sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} \quad \mathrm{C}$

उदाहरण 5 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}, \ \beta > \alpha$ का मान निकालिए।

हल $x - \alpha = t^2$ रखिए। तब, $\quad - x = \quad - t^2 \quad = \quad -t^2 - \quad = -t^2 -$

तथा $dx = 2tdt$

$$\mathrm{I} = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2\left(\beta-\alpha-t^2\right)}} \quad = \int \frac{2\,dt}{\sqrt{\left(\beta-\alpha-t^2\right)}}$$

$$2 \quad \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}, \text{ जहाँ } k^2 \qquad -$$

$$= 2\sin^{-1}\frac{t}{k} + \mathrm{C} = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}} + \mathrm{C}$$

उदाहरण 6 $\displaystyle\int \tan^8 x \sec^4 x\,dx$ का मान निकालिए।

हल $\displaystyle\mathrm{I} = \int \tan^8 x \sec^4 x\,dx$

$$= \int \tan^8 x\left(\sec^2 x\right)\sec^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^8 x\left(\tan^2 x + 1\right)\sec^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^{10} x \sec^2 x\,dx + \int \tan^8 x \sec^2 x\,dx$$

$$= \frac{\tan^{11} x}{11} + \frac{\tan^9 x}{9} + \mathrm{C}$$

उदाहरण 7 $\int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx$ ज्ञात कीजिए

हल $x^2 = t$ रखिए। तब, $2x\,dx = dt$

अब, $$\text{I} = \int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{t^2+3t+2}$$

मान लीजिए कि $$\frac{t}{t^2+3t+2} = \frac{\text{A}}{t+1} + \frac{\text{B}}{t+2}$$

गुणांकों की तुलना करने पर, हमें, $\text{A} = -1, \text{B} = 2$ प्राप्त होता है।

तब, $$\text{I} = \frac{1}{2}\left[2\int \frac{dt}{t+2} - \int \frac{dt}{t+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\log|t+2| - \log|t+1|\right]$$

$$= \log\left|\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\right| + \text{C}$$

उदाहरण 8 $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\cos^2 x}$ ज्ञात कीजिए।

हल अंश और हर को $\cos^2 x$, से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\text{I} = \frac{\sec^2 x\,dx}{2\tan^2 x \quad 5}$$

$\tan x = t$ रखिए, जिससे $\sec^2 x\,dx = dt$ होगा। तब,

$$\text{I} = \int \frac{dt}{2t^2+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{5}}\right) + \mathrm{C}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\tan x\right) + \mathrm{C}.$$

उदाहरण 9 योग की सीमा के रूप में, $\int_{-1}^{2} 7x-5 \; dx$ का मान निकालिए।

हल यहाँ $a = -1$, $b = 2$, तथा $h = \dfrac{2+1}{n}$ है। अर्थात्, $nh = 3$ और $f(x) = 7x - 5$ है।

अब, हमें प्राप्त है :

$$\int_{-1}^{2}(7x-5)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(-1) + f(-1+h) + f(-1+2h) + \ldots + f(-1+(n-1)h)\right]$$

ध्यान दीजिए कि

$f(-1) = -7 - 5 = -12$

$f(-1 + h) = -7 + 7h - 5 = -12 + 7h$

$f(-1 + (n-1)h) = 7(n-1)h - 12$

अतः

$$\int_{-1}^{2}(7x-5)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[(-12) + (7h - 12) + (14h - 12) + \ldots + (7(n-1)h - 12)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[7h\left[1 + 2 + \ldots + (n-1)\right] - 12n\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[7h\frac{(n-1)n}{2} - 12n\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{7}{2}(nh)(nh-h) - 12nh\right]$$

$$= \frac{7}{2}\;3\quad 3-0\quad -12\quad 3 = \frac{7\times 9}{2} - 36 = \frac{-9}{2}$$

उदाहरण 10 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7 x}{\cot^7 x + \tan^7 x} dx$ का मान निकालिए।

हल हमें प्राप्त है :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7 x}{\cot^7 x + \tan^7 x} dx \qquad ...(1)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cot^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \tan^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \qquad (P_4 \text{ द्वारा})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^7 x dx}{\cot^7 x + \tan^7 x} \qquad ...(2)$$

(1) और (2), को जोड़ने पर:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tan^7 x + \cot^7 x}{\tan^7 x + \cot^7 x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \quad \text{या} \quad I = \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 11 $\int_2^8 \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{10-x}} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए

$$I = \int_2^8 \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{10-x}} dx \qquad ...(1)$$

$$= \ {}_{2}^{8} \frac{\sqrt{10-(10-x)}}{\sqrt{10-x} \quad \sqrt{10- \ 10-x}} dx \qquad (P_3 \text{ द्वारा})$$

$$\Rightarrow \qquad I = \int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{10-x}+\sqrt{x}} dx \qquad (2)$$

(1) और (2), को जोड़ने पर: $2\mathrm{I} \quad {}_{2}^{8} \ 1dx \quad 8-2 \quad 6$

अत:, $\qquad I = 3$ हुआ।

उदाहरण 12 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx$$

$$= \left(-\cos x + \sin x\right)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = 1$$

उदाहरण 13 $x^2 \tan^{-1} x \, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल $\qquad I = \ x^2 \tan^{-1} x \, dx$

$$= \tan^{-1} x \int x^2 dx - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log\left|1+x^2\right| + \text{C}$$

उदाहरण 14 $\int\sqrt{10-4x+4x^2}\,dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $\text{I} = \sqrt{10-4x \quad 4x^2}\,dx \quad = \sqrt{\;2x-1\;^{2} \quad 3\;^{2}}\;dx$

$t = 2x - 1$ रखिए, जिससे $dt = 2dx$

अत:, $$\text{I} = \frac{1}{2}\int\sqrt{t^2+(3)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\;t\;\frac{\sqrt{t^2 \quad 9}}{2} \quad \frac{9}{4}\log\left|t \quad \sqrt{t^2 \quad 9}\right| \quad \text{C}$$

$$= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2+9} + \frac{9}{4}\log\left|(2x-1)+\sqrt{(2x-1)^2+9}\right| + \text{C}$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 15 $\int\frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}$ का मान निकालिए।

हल मान लीजिए कि $x^2 = t$ तब,

$$\frac{x^2}{x^4+x^2-2} = \frac{t}{t^2+t-2} = \frac{t}{(t+2)\,(t-1)} = \frac{\text{A}}{t+2} + \frac{\text{B}}{t-1}$$

अत:, $t = \text{A}\,(t-1) + \text{B}\,(t+2)$

गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$ प्राप्त होता है।

$$\frac{x^2}{x^4+x^2-2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2-1}$$

इस प्रकार $\quad \int\frac{x^2}{x^4+x^2-2}\,dx=\frac{2}{3}\int\frac{1\,dx}{x^2+2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-1}$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

उदाहरण 16 $\quad \frac{x^3 \quad x}{x^4-9}dx$ का मान निकालिए।

हल हमें प्राप्त है : $I=\frac{x^3 \quad x}{x^4-9}dx \quad = \quad \frac{x^3}{x^4-9}dx \quad \frac{x\,dx}{x^4-9} \quad = I_1+I_2$.

अब $\quad I_1=\int\frac{x^3dx}{x^4-9}$

$t=x^4-9$ रखिए, जिससे $4x^3\,dx=dt$

इस प्रकार $\quad I_1=\frac{1}{4}\ \frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\log|t| \quad C_1=\frac{1}{4}\log\left|x^4-9\right|+C_1$

पुनः $\quad I_2=\int\frac{x}{x^4-9}dx$

$x^2=u$ रखिए, जिससे $2x\,dx=du$ तब,

$$I_2=\frac{1}{2}\ \frac{du}{u^2-\ 3^{\ 2}}=\frac{1}{2\quad 6}\log\left|\frac{u-3}{u\quad 3}\right| \quad C_2$$

$$= \frac{1}{12}\log\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C_2$$

इस प्रकार $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$

$$= \frac{1}{4}\log\left|x^4-9\right| + \frac{1}{12}\log\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C$$

उदाहरण 17 दर्शाइए कि $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$

हल मान लीजिए $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx \qquad \text{(P4 द्वारा)}$$

$\Rightarrow$
$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

अतः, हमें प्राप्त होता है : $2\mathrm{I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sec\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}\right)-\left\{\log\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right] \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{1}\right) \quad = \frac{2}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

अत:, $$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

उदाहरण 18 $\int_0^1 x\left(\tan^{-1}x\right)^2 dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $$\mathrm{I} = \int_0^1 x\left(\tan^{-1}x\right)^2 dx$$

समाकलन द्वारा, हमें प्राप्त होता है:

$$\mathrm{I} = \frac{x^2}{2}\left[\left(\tan^{-1}x\right)^2\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 . 2\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}.\tan^{-1}x\,dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \mathrm{I}_1, \text{ जहाँ } \mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\tan^{-1}x\,dx \text{ है।}$$

अब $$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\tan^{-1}x\,dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x\,dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\tan^{-1} x\,dx$$

$$= I_2 - \frac{1}{2}\left((\tan^{-1} x)^2\right)_0^1 \qquad = I_2 - \frac{\pi^2}{32}$$

यहाँ $\quad I_2 = \int_0^1 \tan^{-1} x\,dx \;= (x\tan^{-1} x)_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\log\left|1+x^2\right|\right)_0^1 \quad = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

इस प्रकार, $I_1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\log 2 - \dfrac{\pi^2}{32}$

अतः, $\quad I = \dfrac{\pi^2}{32} - \dfrac{\pi}{4} \quad \dfrac{1}{2}\log 2 \quad \dfrac{\pi^2}{32} = \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\log 2$

$$= \frac{\pi^2 - 4\pi}{16} + \log\sqrt{2}$$

उदाहरण 19 $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$, का मान निकालिए, जहाँ $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$

हल हम f को $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{यदि } -1 < x \le 0 \\ x+2, & \text{यदि } 0 < x \le 1 \\ 3x, & \text{यदि } 1 < x \le 2 \end{cases}$ के रूप में पुनः परिभाषित कर सकते हैं।

अतः, $\quad \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(2-x)\,dx + \int_{0}^{1}(x+2)\,dx + \int_{1}^{2} 3x\,dx \qquad$ (P_2 से)

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)_0^1 + \left(\frac{3x^2}{2}\right)_1^2$$

$$= 0 - \left(-2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + 2\right) + 3\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{19}{2}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 20 से 28 तक प्रत्येक में दिए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

उदाहरण 20 $\int e^x (\cos x - \sin x) dx$ बराबर है

(A) $e^x \cos x + C$ (B) $e^x \sin x + C$

(C) $-e^x \cos x + C$ (D) $-e^x \sin x + C$

हल (A) सही उत्तर है, क्योंकि $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x f(x) + C$ यहाँ $f(x) = \cos x$ और $f'(x) = -\sin x$

उदाहरण 21 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ बराबर है

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $(\tan x + \cot x)^2 + C$

(C) $\tan x - \cot x + C$ (D) $(\tan x - \cot x)^2 + C$

हल (C) सही उत्तर है, क्योंकि

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \tan x - \cot x + C$$

उदाहरण 22 यदि $\int \frac{3e^x - 5e^{-x}}{4e^x + 5e^{-x}} dx = ax + b \log |4e^x + 5e^{-x}| + C$ है, तो

(A) $a = \frac{1}{-8}, b = \frac{7}{8}$ (B) $a = \frac{1}{8}, b = \frac{7}{8}$

(C) $a = \frac{1}{-8}, b = \frac{-7}{8}$ (D) $a = \frac{1}{8}, b = \frac{-7}{8}$

हल (C) सही उत्तर है, क्योंकि दोनों पक्षों का अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{3e^x - 5e^{-x}}{4e^x + 5e^{-x}} = a + b\,\frac{\left(4e^x - 5e^{-x}\right)}{4e^x + 5e^{-x}}\ ,\ \text{जिससे}$$

$3e^x - 5e^{-x} = a\,(4e^x + 5e^{-x}) + b\,(4e^x - 5e^{-x})$ प्राप्त होता है। दोनों पक्षों में, गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $3 = 4a + 4b$ और $-5 = 5a - 5b$ प्राप्त होता है। इससे $a = \frac{-1}{8}$ और $b = \frac{7}{8}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 23 $\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$ बराबर है

(A) $\int_a^b f(x-c)dx$ (B) $\int_a^b f(x+c)dx$ (C) $\int_a^b f(x)dx$ (D) $\int_{a-c}^{b-c} f(x)dx$

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $x = t + c$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(c+t)dt = \int_a^b f(x+c)dx$$

उदाहरण 24 यदि [0, 1] में f और g ऐसे सतत फलन हैं, जो $f(x) = f(a-x)$ और $g(x) + g(a-x) = a$, को संतुष्ट करते हैं, तो $\int_0^a f(x).g(x)dx$ बराबर है

(A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$ (C) $\int_0^a f(x)dx$ (D) $a\int_0^a f(x)dx$

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $\mathrm{I} = \int_0^a f(x).g(x)dx$

$$= \int_0^a f(a-x)\,g(a-x)dx = \int_0^a f(x)\left(a - g(x)\right)dx$$

$$= a\int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x).g(x)\,dx = a\int_0^a f(x)\,dx - \mathrm{I}$$

या $\quad \mathrm{I} = \dfrac{a}{2}\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$

उदाहरण 25 यदि $x = \displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+9t^2}}$ और $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ay$, है, तो a बराबर है

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 1

हल (C) सही उत्तर है, क्योंकि $x = \displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+9t^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+9y^2}}$

जिससे $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{18y}{2\sqrt{1+9y^2}} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 9y$

उदाहरण 26 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3+|x|+1}{x^2+2|x|+1}\,dx$ बराबर है

(A) log 2 (B) 2 log 2 (C) $\dfrac{1}{2}\log 2$ (D) 4 log 2

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3+|x|+1}{x^2+2|x|+1}\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^2+2|x|+1} + \int_{-1}^{1} \frac{|x|+1}{x^2+2|x|+1}\,dx = 0 + 2\int_0^1 \frac{|x|+1}{x^2+2|x|+1}\,dx$$

[विषम फलन + सम फलन]

$$= 2\int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx \quad = 2\,\left|\log|x+1|\right|_0^1 = 2\log 2$$

उदाहरण 27 यदि $\int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt = a$, है, तब $\int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2} dt$ बराबर है

(A) $a - 1 + \frac{e}{2}$ (B) $a + 1 - \frac{e}{2}$ (C) $a - 1 - \frac{e}{2}$ (D) $a + 1 + \frac{e}{2}$

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt = \left|\frac{1}{1+t} e^t\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2} dt = a$ (दिया है)

अतः, $\int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2} = a - \frac{e}{2} + 1$

उदाहरण 28 $\int_{-2}^{2} |x \cos \pi x| dx$ बराबर है

(A) $\frac{8}{\pi}$ (B) $\frac{4}{\pi}$ (C) $\frac{2}{\pi}$ (D) $\frac{1}{\pi}$

हल (A) सही उत्तर है, क्योंकि $\mathrm{I} = \int_{-2}^{2} |x \cos \pi x| dx = 2\int_0^2 |x \cos \pi x| dx$

$$= 2\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} |x \cos \pi x| dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |x \cos \pi x|\, dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} |x \cos \pi x|\, dx\right\} = \frac{8}{\pi}$$

उदाहरणों 29 से 32 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए–

उदाहरण 29 $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x} dx =$ ________

हल $\frac{\tan^7 x}{7} + \mathrm{C}$

उदाहरण 30 $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ है, यदि f एक ________ फलन है।

हल विषम

उदाहरण 31 $\int_{0}^{2a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$, यदि $f(2a - x) =$ ________

हल $f(x)$

उदाहरण 32 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x\, dx}{\sin^n x + \cos^n x} =$ ________

हल $\frac{\pi}{4}$

7.3 प्रश्नावली

संक्षिप्त उत्तर (S.A.)

निम्नलिखित का सत्यापन कीजिए–

1. $\int \frac{2x-1}{2x+3} dx = x - \log |(2x + 3)^2| + C$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2 + 3x} dx = \log |x^2 + 3x| + C$

निम्नलिखित के मान निकालिए–

3. $\int \frac{(x^2+2)\, dx}{x+1}$

4. $\int \frac{e^{6\log x} - e^{5\log x}}{e^{4\log x} - e^{3\log x}} dx$

5. $\int \frac{(1+\cos x)}{x+\sin x} dx$

6. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

7. $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

8. $\int \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$

9. $\int \sqrt{1 + \sin x} dx$

10. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x} + 1} dx$ (**संकेत** : $\sqrt{x} = z$ रखिए)

11. $\int \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}} dx$

12. $\int \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{3}{4}}} dx$ (**संकेत** : $x = z^4$ रखिए)

13. $\int \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$

15. $\int \dfrac{dt}{\sqrt{3t - 2t^2}}$

16. $\int \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

17. $\int \sqrt{5 - 2x + x^2} \, dx$

18. $\int \dfrac{x}{x^4 - 1} dx$

19. $\int \dfrac{x^2}{1 - x^4} dx$ [$x^2 = t$ रखिए]

20. $\int \sqrt{2ax - x^2} \, dx$

21. $\int \dfrac{\sin^{-1} x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

22. $\int \dfrac{(\cos 5x + \cos 4x)}{1 - 2\cos 3x} dx$

23. $\int \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

24. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 - x^3}} dx$

25. $\int \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} dx$

26. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^4 - 1}}$ (**संकेत** : $x^2 = \sec\theta$ रखिए)

निम्नलिखित का योग की सीमा के रूप में मान निकालिए–

27. $\int_0^2 (x^2+3)\,dx$

28. $\int_0^2 e^x\,dx$

निम्नलिखित का मान निकालिए–

29. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x\,dx}{1+m^2\tan^2 x}$

31. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

32. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

33. $\int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x\,dx$

34. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(**संकेत:** $x = \sin\theta$ रखिए)

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

35. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2-12}$

36. $\frac{x^2\,dx}{(x^2 \quad a^2)(x^2 \quad b^2)}$

37. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\sin x}$

38. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}\,dx$

39. $\int e^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)dx$

40. $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx$

(संकेत: $x = a\tan^2\theta$ रखिए)

41. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{(1-\cos x)^{\frac{5}{2}}}\,dx$

42. $\displaystyle\int e^{-3x}\cos^3 x\,dx$

43. $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,dx$ (**संकेत:** $\tan x = t^2$ रखिए)

44. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}$

(**संकेत:** अंश और हर को $\cos^4 x$ से भाग दीजिए)

45. $\displaystyle\int_0^1 x\log(1+2x)\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\log\sin x\,dx$

47. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x+\cos x)dx$

उद्देश्यात्मक प्रश्न

प्रश्न 48 से 58 तक प्रत्येक में दिए हुए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

48. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x - \cos 2\theta}{\cos x - \cos\theta}\,dx$ बराबर है

(A) $2(\sin x + x\cos\theta) + C$

(B) $2(\sin x - x\cos\theta) + C$

(C) $2(\sin x + 2x\cos\theta) + C$

(D) $2(\sin x - 2x\cos\theta) + C$

49. $\displaystyle\frac{dx}{\sin\ x-a\ \sin\ x-b}$ बराबर है

(A) $\sin(b-a)\log\left|\dfrac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + C$

(B) $\mathrm{cosec}\,(b-a)\log\left|\dfrac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + C$

(C) $\mathrm{cosec}\,(b-a)\log\left|\dfrac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + C$

(D) $\sin(b-a)\log\left|\dfrac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + C$

50. $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$ बराबर है

(A) $(x + 1)\ \tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

(B) $x\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

(C) $\sqrt{x} - x\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

(D) $\sqrt{x} - (x+1)\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

51. $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$ बराबर है

(A) $\frac{e^x}{1+x^2} + C$

(B) $\frac{-e^x}{1+x^2} + C$

(C) $\frac{e^x}{(1+x^2)^2} + C$

(D) $\frac{-e^x}{(1+x^2)^2} + C$

52. $\int \frac{x^9\,dx}{(4x^2+1)^6}$ बराबर है

(A) $\frac{1}{5x}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{-5} + C$

(B) $\frac{1}{5}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{-5} + C$

(C) $\frac{1}{10x}\left(\frac{1}{x^2}+4\right)^{-5} + C$

(D) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{x^2}+4\right)^{-5} + C$

53. यदि $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)} = a \log|1 + x^2| + b \tan^{-1}x + \frac{1}{5}\log|x + 2| + C$ है, तो

(A) $a = \frac{1}{-10},\ b = \frac{2}{-5}$

(B) $a = \frac{1}{10},\ b = -\frac{2}{5}$

(C) $a = \frac{1}{-10},\ b = \frac{2}{5}$

(D) $a = \frac{1}{10},\ b = \frac{2}{5}$

54. $\int \frac{x^3}{x+1} dx$ बराबर है

(A) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|1-x| + C$

(B) $x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \log|1-x| + C$

(C) $x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \log|1+x| + C$

(D) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|1+x| + C$

55. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$ बराबर है

(A) $\log|1+\cos x| + C$

(B) $\log|x+\sin x| + C$

(C) $x - \tan\frac{x}{2} + C$

(D) $x.\tan\frac{x}{2} + C$

56. यदि $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = a(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + b\sqrt{1+x^2} + C$ है, तो

(A) $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$

(B) $a = \frac{-1}{3}$, $b = 1$

(C) $a = \frac{1}{-3}$, $b = -1$

(D) $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$

57. $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ बराबर है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

58. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ बराबर है

(A) $2\sqrt{2}$

(B) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$

(C) 2

(D) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

प्रश्नों 59 से 63 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए –

59. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx$ के $=$ _______.

60. $\int \frac{x+3}{(x+4)^2} e^x dx$ $=$ _______ .

61. यदि $\int_0^a \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{\pi}{8}$ है, तो $a =$ _______ .

62. $\int \frac{\sin x}{3+4\cos^2 x} dx$ $=$ _______ .

63. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ का मान _______ .

अध्याय **8**

समाकलों के अनुप्रयोग

8.1 समग्र अवलोकन (Overview)

इस अध्याय में, सरल वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करने, रेखाओं तथा वृत्तों, परवलयों और दीर्घवृत्तों के चापों के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात करने तथा उपरोक्त वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए समाकलों के कुछ विशिष्ट अनुप्रयोगों की चर्चा की गयी है:

8.1.1 वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा $x = a$ और $x = b$ $(b > a)$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल सूत्र है:

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

8.1.2 वक्र $x = \phi(y)$, y-अक्ष तथा $y = c$ और $y = d$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल सूत्र है:

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_c^d x\,dy = \int_c^d \phi(y)\,dy$$

8.1.3 दो $y = f(x)$, $y = g(x)$ वक्रों तथा $x = a$, $x = b$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल सूत्र है:

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$, जहाँ $f(x) \geq g(x)$ $[a, b]$ में है।

8.1.4 यदि $[a, c]$ में, $f(x) \geq g(x)$ है तथा $[c, b]$ में, $f(x) \leq g(x)$, $a < c < b$, है तो

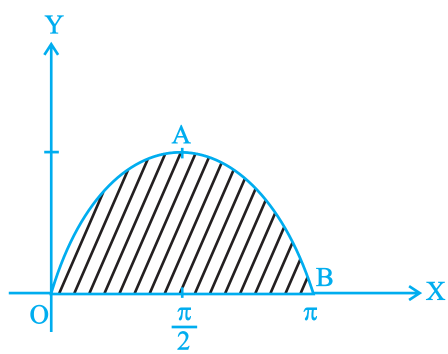
$$\text{क्षेत्रफल} = \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$$ है।

8.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

उदाहरण 1 0 और π के बीच, वक्र $y = \sin x$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है:



आकृति 8.1

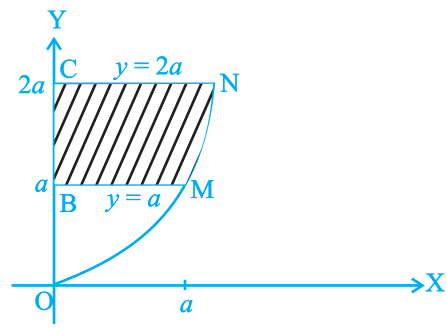
क्षेत्रफल OAB $= \int_0^\pi y dx = \int_0^\pi \sin x \, dx = \left| -\cos x \right|_0^\pi$

$= \cos 0 - \cos\pi = 2$ वर्ग इकाई

उदाहरण 2 वक्र $ay^2 = x^3$, y-अक्ष तथा $y = a$ और $y = 2a$ रेखाओं द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है : क्षेत्रफल BMNC $= \int_a^{2a} x dy = \int_a^{2a} a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} dy$

$$= \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{5} \left| y^{\frac{5}{3}} \right|_a^{2a}$$



आकृति 8.2

$$= \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{5} \left| 2a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{5}{3}} \right|$$

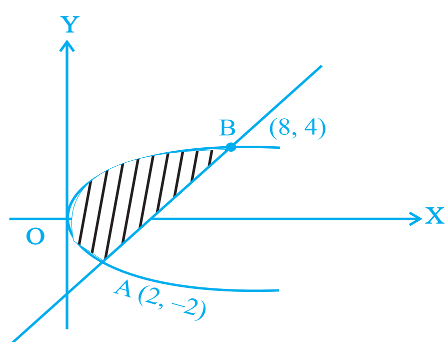
$$= \frac{3}{5} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{5}{3}} \left| (2)^{\frac{5}{3}} - 1 \right|$$

$$= \frac{3}{5} a^2 \left| 2.2^{\frac{2}{3}} - 1 \right| \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 3 परवलय $y^2 = 2x$ और सरल रेखा $x - y = 4$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिये हुए वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदु समीकरण $x - y = 4$ और $y^2 = 2x$ को x और y के लिए हल करने पर प्राप्त किए जाते हैं।

हमें $y^2 = 8 + 2y$ अर्थात् $(y - 4)(y + 2) = 0$ प्राप्त है। इससे $y = 4, -2$ तथा $x = 8, 2$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, वाँछित प्रतिच्छेद बिंदु (8, 4) और (2, –2) है।



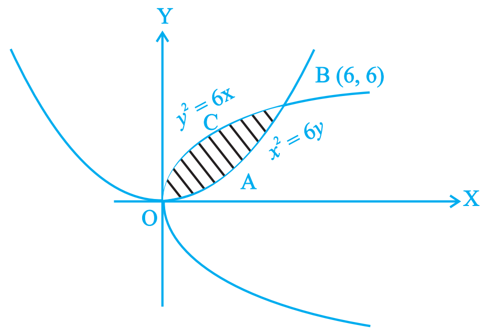
आकृति 8.3

अतः, क्षेत्रफल $= \int_{-2}^{4} \left(4 + y - \frac{1}{2} y^2 \right) dy$

$$= \left| 4y + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{6} y^3 \right|_{-2}^{4} = 18 \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 4 परवलयों $y^2 = 6x$ और $x^2 = 6y$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए परवलयों के प्रतिच्छेद बिंदु इन के समीकरणों को x और y के लिए हल करके ज्ञात किए जा सकते हैं। ये बिंदु 0(0, 0) और (6, 6) हैं। अत:,



आकृति 8.4

$$\text{OABC का क्षेत्रफल} = \int_0^6 \sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\, dx$$

$$= \left| 2\sqrt{6}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{18} \right|_0^6$$

$$= 2\sqrt{6}\,\frac{(6)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(6)^3}{18} = 12 \text{ वर्ग इकाई}$$

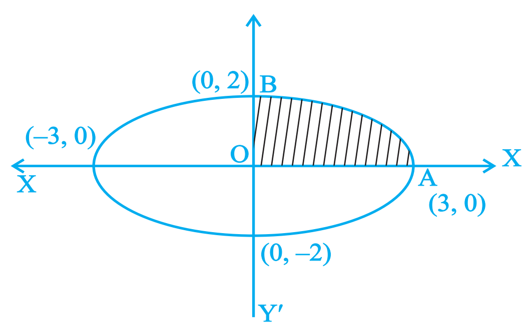
उदाहरण 5 वक्र $x = 3\cos t, y = 2\sin t$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल t को निम्नलिखित प्रकार से लुप्त कीजिए:

$x = 3\cos t,\ y = 2\sin t \Rightarrow \frac{x}{3} = \cos t$, तथा $\frac{y}{2}\ \sin t$, इनसे हमें, प्राप्त होता है:

$\frac{x^2}{9}\ \ \frac{y^2}{4} = 1$ जो एक दीर्घवृत्त का समीकरण है।

आकृति 8.5 से, हम प्राप्त करते हैं कि



आकृति 8.5

$$\text{वाँछित क्षेत्रफल} = 4\int_0^3 \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\, dx$$

$$= \frac{8}{3}\ \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}\ \ \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\ \Big|_0^3$$

$= 6\pi$ वर्ग इकाई

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 6 उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो परवलय $y = \frac{3x^2}{4}$ और रेखा $3x - 2y + 12 = 0$ के बीच में परिबद्ध है।

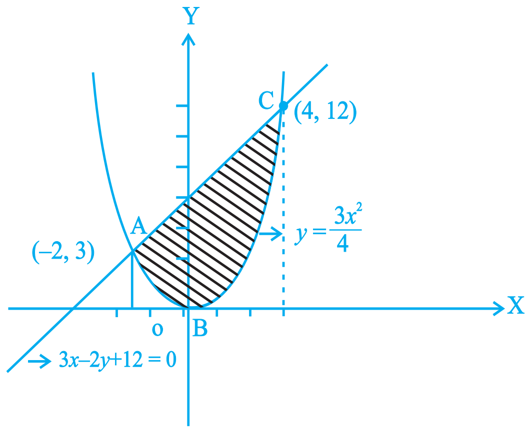
हल दिये हुए वक्र $y = \frac{3x^2}{4}$ और रेखा $3x - 2y + 12 = 0$ के समीकरणों को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$3x^2 - 6x - 24 = 0$$

$\Rightarrow \qquad (x - 4)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow \qquad x = 4, \quad x = -2$

जिनसे $y = 12, \quad y = 3$ प्राप्त होता है।



आकृति 8.6

आकृति 8.6 से वाँछित क्षेत्रफल = ABC का क्षेत्रफल

$$= \int_{-2}^{4}\left(\frac{12 + 3x}{2}\right) dx - \int_{-2}^{4}\frac{3x^2}{4} dx$$

$$= \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)_{-2}^{4} - \left|\frac{3x^3}{12}\right|_{-2}^{4}$$

= 27 वर्ग इकाई

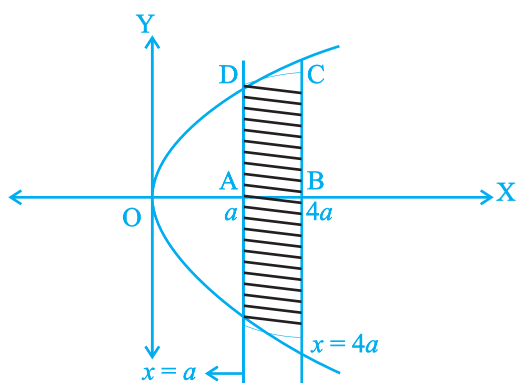
उदाहरण 7 वक्र $x = at^2$ और $y = 2at$ द्वारा $t = 1$ और $t = 2$ के संगत कोटियों के बीच परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है : $x = at^2$ ...(i),

$y = 2at$ ...(ii) जिससे $t = \frac{y}{2a}$ हुआ।

t का यह मान (i) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है : $y^2 = 4ax$ ।

(i) में $t = 1$ और $t = 2$ रखने पर, हमें $x = a$, और $x = 4a$ प्राप्त होते हैं।



आकृति 8.7

आकृति 8.7 से, वाँछित क्षेत्रफल

= 2 × ABCD का क्षेत्रफल

$$= 2\int_{a}^{4a} y\,dx = 2 \times 2\int_{a}^{4a}\sqrt{ax}\,dx$$

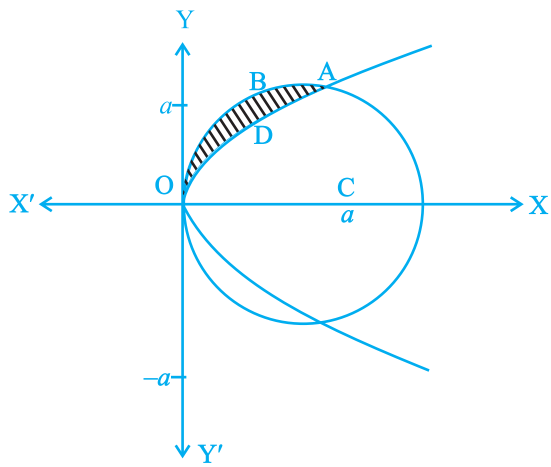
$$= 8\sqrt{a}\left|\frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_{a}^{4a} = \frac{56}{3}a^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 8 x–अक्ष के ऊपर परवलय $y^2 = ax$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 2ax$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल वक्रों की दिये हुए समीकरणों को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है: $x^2 + ax = 2ax$

जिससे $x = 0$ या $x = a$ प्राप्त होते हैं।

इससे क्रमशः $y = 0$ और $y = \pm a$ प्राप्त होता है।



आकृति 8.8

आकृति 8.8 से, ODAB क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_0^a \left(\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax}\right) dx$$

मान लीजिए कि $x = 2a \sin^2\theta$ है। तब,

$dx = 4a \sin\theta \cos\theta \, d\theta$ तथा

$$x = 0, \Rightarrow \theta = 0, \; x = a \Rightarrow \theta = \frac{}{4}$$

पुनः, $$\int_0^a \sqrt{2ax - x^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a \sin\theta \cos\theta)\,(4a \sin\theta \cos\theta)\, d\theta$$

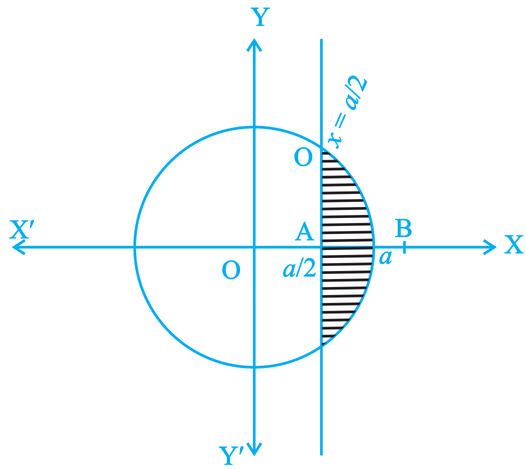
$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta = a^2 \left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{}{4} a^2$$ इसके साथ ही,

$$\int_0^a \sqrt{ax}\, dx = \sqrt{a}\, \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)_0^a = \frac{2}{3} a^2$$

इस प्रकार, वाँछित क्षेत्रफल $= \frac{\pi}{4} a^2 - \frac{2}{3} a^2 = a^2 \left(\frac{}{4} - \frac{2}{3}\right)$ वर्ग इकाई

उदाहरण 9 रेखा $x = \frac{a}{2}$ द्वारा वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के काटे गए एक लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ और $x = \frac{a}{2}$ को हल करने पर, हमें इनके प्रतिच्छेद बिंदु प्राप्त होते हैं, जो $\left(\frac{a}{2}, \sqrt{3}\,\frac{a}{2}\right)$ और $\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ हैं।



आकृति 8.9

अत: आकृति 8.9 से, हमें प्राप्त होता है:

वाँछित क्षेत्रफल = OAB के क्षेत्रफल का दोगुना $= 2\int_{\frac{a}{2}}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{\frac{a}{2}}^{a}$$

$$= 2\left[\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{a}{4}\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \frac{a^2}{12}\left(6\pi - 3\sqrt{3} - 2\pi\right) = \frac{a^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) \text{ वर्ग इकाई}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 10 से 12 तक प्रत्येक में, दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

उदाहरण 10 वृत्त $x^2 + y^2 = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है

(A) 4π वर्ग इकाई (B) $2\sqrt{2}\pi$ वर्ग इकाई

(C) $4\pi^2$ वर्ग इकाई (D) 2π वर्ग इकाई

हल सही उत्तर (D) है, क्योंकि क्षेत्रफल $= 4\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2 - x^2}$

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2} \quad \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 11 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है

(A) $\pi^2 ab$ (B) πab (C) $\pi a^2 b$ (D) πab^2

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि क्षेत्रफल $= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = \pi ab$$

उदाहरण 12 वक्र $y = x^2$ और रेखा $y = 16$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{32}{3}$ (B) $\frac{256}{3}$ (C) $\frac{64}{3}$ (D) $\frac{128}{3}$

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि क्षेत्रफल $= 2\int_0^{16}\sqrt{y}\,dy$ है।

उदाहरण 13 और 14 में से प्रत्येक में रिक्त स्थान भरिए–

उदाहरण 13 वक्र $x = y^2$, y-अक्ष तथा रेखा $y = 3$ और $y = 4$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ________ है।

हल $\frac{37}{3}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 14 वक्र $y = x^2 + x$, x-अक्ष तथा $x = 2$ और $x = 5$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ________ के बराबर है।

हल $\frac{297}{6}$ वर्ग इकाई $= \frac{99}{2}$ वर्ग इकाई

8.3 प्रश्नावली

संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. वक्र $y^2 = 9x$, और $y = 3x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. परवलय $y^2 = 2px$, और $x^2 = 2py$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. वक्र $y = x^3$, $y = x + 6$ और $x = 0$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. वक्र $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. $y^2 = 9x$ और $y = x$ के बीच में पड़ने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. परवलय $x^2 = y$ और रेखा $y = x + 2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. रेखा $x = 2$ और परवलय $y^2 = 8x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. क्षेत्र $\{(x, 0) : y = \sqrt{4-x^2}\}$ और x-अक्ष का चित्रण कीजिए। समाकलन का उपयोग करते हुए, इस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. वक्र $y = 2\sqrt{x}$ के अंतर्गत $x = 0$ और $x = 1$ रेखाओं के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. समाकलन का इस्तेमाल करते हुए, रेखा $2y = 5x + 7$, x-अक्ष तथा $x = 2$ और $x = 8$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11. वक्र $y = \sqrt{x-1}$ का अंतराल $[1, 5]$ में एक संभावित आकृति खींचिए। इस वक्र के अंतर्गत तथा $x = 1$ और $x = 5$ रेखाओं के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

12. वक्र $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ के अंतर्गत तथा $x = 0$ और $x = a$ रेखाओं के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13. $y = \sqrt{x}$ और $y = x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14. वक्र $y = -x^2$ और सरल रेखा $x + y + 2 = 0$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y = \sqrt{x}$, $x = 2y + 3$ और x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

16. वक्र $y^2 = 2x$ और $x^2 + y^2 = 4x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

17. $x = 0$ और $x = 2\pi$ के बीच वक्र $y = \sin x$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

18. समाकलन का प्रयोग करते हुए, उस त्रिभुज द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष $(-1, 1)$, $(0, 5)$ और $(3, 2)$ हैं।

19. क्षेत्र $\{(x, y) : y^2 \le 6ax$ और $x^2 + y^2 \le 16a^2\}$ का एक संभावित आकृति खींचिए। साथ ही, समाकलन की विधि द्वारा इस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

20. रेखा $x + 2y = 2$, $y - x = 1$ और $2x + y = 7$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

21. रेखाओं $y = 4x + 5$, $y = 5 - x$ और $4y = x + 5$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

22. वक्र $y = 2\cos x$ तथा x-अक्ष द्वारा $x = 0$ से $x = 2\pi$ तक परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

23. वक्र $y = 1 + |x + 1|$, $x = -3$, $x = 3$ तथा $y = 0$ का एक संभावित आकृति खींचिए। समाकलन का प्रयोग करते हुए, इन से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उद्देश्यात्मक प्रश्न

प्रश्न 24 से 34 तक प्रत्येक में, दिए हुए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

24. y-अक्ष, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\sqrt{2}$ वर्ग इकाई (B) $(\sqrt{2}+1)$ वर्ग इकाई

(C) $(\sqrt{2}-1)$ वर्ग इकाई (D) $(2\sqrt{2}-1)$ वर्ग इकाई

25. वक्र $x^2 = 4y$ और सरल रेखा $x = 4y - 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{3}{8}$ वर्ग इकाई (B) $\frac{5}{8}$ वर्ग इकाई (C) $\frac{7}{8}$ वर्ग इकाई (D) $\frac{9}{8}$ वर्ग इकाई

26. वक्र $y = \sqrt{16 - x^2}$ और x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 8π वर्ग इकाई (B) 20π वर्ग इकाई (C) 16π वर्ग इकाई (D) 256π वर्ग इकाई

27. प्रथम चतुर्थांश में, x-अक्ष, रेखा $y = x$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 32$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है–

(A) 16π वर्ग इकाई (B) 4π वर्ग इकाई (C) 32π वर्ग इकाई (D) 24 वर्ग इकाई

28. वक्र $y = \cos x$ द्वारा $x = 0$ और $x = \pi$ के बीच में परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 2 वर्ग इकाई (B) 4 वर्ग इकाई (C) 3 वर्ग इकाई (D) 1 वर्ग इकाई

29. परवलय $y^2 = x$ और सरल रेखा $2y = x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{4}{3}$ वर्ग इकाई (B) 1 वर्ग इकाई (C) $\frac{2}{3}$ वर्ग इकाई (D) $\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई

30. वक्र $y = \sin x$ द्वारा कोटि $x = 0$, और $x = \frac{\pi}{2}$ तथा x-अक्ष के बीच परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 2 वर्ग इकाई (B) 4 वर्ग इकाई (C) 3 वर्ग इकाई (D) 1 वर्ग इकाई

31. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 20π वर्ग इकाई (B) $20\pi^2$ वर्ग इकाई (C) $16\pi^2$ वर्ग इकाई (D) $25\ \pi$ वर्ग इकाई

32. वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 2π वर्ग इकाई (B) π वर्ग इकाई (C) 3π वर्ग इकाई (D) 4π वर्ग इकाई

33. वक्र $y = x + 1$ तथा $x = 2$ और $x = 3$ रेखाओं द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{7}{2}$ वर्ग इकाई (B) $\frac{9}{2}$ वर्ग इकाई (C) $\frac{11}{2}$ वर्ग इकाई (D) $\frac{13}{2}$ वर्ग इकाई

34. वक्र $x = 2y + 3$ तथा $y = 1$ और $y = -1$ रेखाओं द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 4 वर्ग इकाई (B) $\frac{3}{2}$ वर्ग इकाई (C) 6 वर्ग इकाई (D) 8 वर्ग इकाई

अध्याय 9

अवकल समीकरण

9.1 समग्र अवलोकन (Overview)

(i) एक ऐसा समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर (चरों) के सापेक्ष आश्रित चर के अवकलज सम्मिलित हों, अवकल समीकरण कहलाता है।

(ii) एक अवकल समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर के केवल एक चर के आश्रित अवकलज सम्मिलित हों एक साधारण अवकल समीकरण (ordinary differential equation) कहलाता है। एक अवकल समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर के एक से अधिक चरों के अवकलज सम्मिलित हों एक आंशिक अवकल समीकरण (Partial differential equation) कहलाता है।

(iii) किसी अवकल समीकरण में सम्मिलित उच्चतम अवकलज की कोटि उस अवकल समीकरण की कोटि (order) कहलाती है।

(iv) यदि कोई अवकल समीकरण अवकलजों में बहुपद समीकरण है तो उस अवकल समीकरण की घात परिभाषित होती है।

(v) किसी अवकल समीकरण की घात (यदि परिभाषित हो) उस अवकल समीकरण में सम्मिलित उच्चतम कोटि अवकलज की उच्चतम घात (केवल धनात्मक पूर्णांक) होती है।

(vi) एक दिए हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करने वाला फलन उस अवकल समीकरण का हल कहलाता है। एक ऐसा हल जिसमें उतने ही स्वेच्छ अचर हों जितनी उस अवकल समीकरण की कोटि है, व्यापक हल कहलाता है। स्वेच्छ अचरों से मुक्त हल विशिष्ट हल कहलाता है।

(vii) किसी दिए हुए फलन से अवकल समीकरण बनाने के लिए हम उस फलन का उत्तरोत्तर उतनी ही बार अवकलन करते हैं जितने उस फलन में स्वेच्छ अचर होते हैं और तब स्वेच्छ अचरों को विलुप्त करते हैं।

(viii) किसी वक्र कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि उतनी ही होती है जितने उस वक्र कुल के संगत समीकरण में स्वेच्छ अचर होते हैं।

(ix) चर पृथक्करणीय विधि ऐसे समीकरण को हल करने के लिए उपयोग की जाती है जिसमें चरों को पूरी तरह से पृथक किया जा सकता है अर्थात् x वाले पद dx के साथ रहने चाहिए और y वाले पद dy के साथ रहने चाहिए।

(x) फलन F (x, y), n घात वाला समघातीय फलन कहलाता है यदि किसी शून्येतर अचर λ के लिए F $(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n$ F (x, y) हो।

(xi) एक अवकल समीकरण जिसे $\frac{dy}{dx} = \text{F}(x, y)$ या $\frac{dx}{dy} = \text{G}(x, y)$, जहाँ F (x, y) और G (x, y) शून्य घात वाले समघातीय फलन है के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है, समघातीय अवकल समीकरण कहलाता है।

(xii) $\frac{dy}{dx} = \text{F}(x, y)$ प्रकार के समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए हम $y = vx$ प्रतिस्थापित करते हैं और $\frac{dx}{dy} = \text{G}(x, y)$ प्रकार के समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए $x = vy$ प्रतिस्थापित करते हैं।

(xiii) $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$ के रूप वाला अवकल समीकरण जिसमें P तथा Q अचर अथवा केवल x के फलन है, प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है। इस प्रकार के अवकल समीकरण का हल y समाकलन गुणांक (I.F.) = $\int(\text{Q} \times \text{I.F.})\,dx + \text{C}$, जहाँ I.F. (Integrating Factor) = $e^{\int \text{P}dx}$ है समाकलन गुणांक दिया जाता है।

(xiv) प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण का दूसरा रूप $\frac{dx}{dy} + \text{P}_1 x = \text{Q}_1$ है जहाँ P_1 और Q_1 अचर अथवा केवल y के फलन हैं। इस प्रकार के अवकल समीकरण का हल x (I.F.) = $\int(\text{Q}_1 \times \text{I.F.})\,dy + \text{C}$, जहाँ I.F. = $e^{\int \text{P}_1 dy}$ है, द्वारा दिया जाता है।

9.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

उदाहरण 1 वक्रों के कुल $y = \text{A}e^{2x} + \text{B}.e^{-2x}$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल $y = \text{A}e^{2x} + \text{B}.e^{-2x}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\text{A}e^{2x} - 2\,\text{B}.e^{-2x} \quad \text{तथा} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4\text{A}e^{2x} + 4\text{B}e^{-2x}$$

इस प्रकार $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4y$ अर्थात्, $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0.$

उदाहरण 2 अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$

$\Rightarrow \log y = \log x + \log c \ \Rightarrow y = cx$

उदाहरण 3 अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = ye^x$, $x = 0, y = e$ में y का मान बताएं जब $x = 1$

हल $\dfrac{dy}{dx} = ye^x \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = e^x dx \quad \Rightarrow \quad \log y = e^x + c$

$x = 0$ और $y = e$, रखने पर हमें $\log e = e^0 + c$ अर्थात् $c = 0$ (Q $\log e = 1$)

प्राप्त होता है। इसलिए $\log y = e^x$

अब इसमें $x = 1$ रखने पर हमें $\log y = e$ अर्थात् $y = e^e$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 4 अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^{2.}$ को हल कीजिए।

हल $\dfrac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ रैखिक अवकल समीकरण है।

यहाँ I.F. = $\int \dfrac{1}{x} dx = e^{\log x} = x$ इसलिए, दिए गए अवकल समीकरण का हल है

$y.x = \quad x\,x^2\,dx$, अर्थात् $yx = \dfrac{x^4}{4} \quad c$

अतः $y = \dfrac{x^3}{4} \quad \dfrac{c}{x}$

उदाहरण 5 मूल बिंदु से गुजरने वाली सरल रेखाओं के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए मूल बिंदु से गुजरने वाली सरल रेखाओं के कुल का समीकरण $y = mx$ है।

इसलिए $\frac{dy}{dx} = m$

m को विलुप्त करने पर हमें $y = \frac{dy}{dx} . x$ या $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 6 एक तल में सभी अक्षैतिज रेखाओं का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल तल में सभी अक्षैतिज रेखाओं का व्यापक समीकरण $ax + by = c$, है जहाँ $a \neq 0$ है।

इसलिए, $a\frac{dx}{dy} \quad b = 0$

पुनः दोनों पक्षों का y के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें

$a\frac{d^2x}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = 0$ प्राप्त होता है

उदाहरण 7 उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल बिंदु के अतिरिक्त किसी अन्य बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $y \quad \frac{y}{x}$ है।

हल दिया है $\frac{dy}{dx} \quad y \quad \frac{y}{x} = y \quad 1 \quad \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} \quad 1 \quad \frac{1}{x} \quad dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\log y = x + \log x + c \Rightarrow \quad \log \frac{y}{x} = x + c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = e^{x+c} = e^x.e^c \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = k \ e^x$$

$$\Rightarrow y = kx \, . \, e^x$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 8 बिंदु (1, 1) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका किसी बिंदु $P(x, y)$ से वक्र के अभिलंब की मूल बिंदु से लंबवत दूरी P से x–अक्ष की दूरी के बराबर है।

हल माना $P(x, y)$ से अभिलंब का समीकरण $Y - y = \frac{-dx}{dy}(X - x)$ अर्थात्

$$Y + X\frac{dx}{dy} - \quad y \quad x\frac{dx}{dy} \quad = 0 \qquad ...(1)$$

इसलिए मूल बिंदु से (1) की लंबवत् दूरी

$$\frac{y \quad x\frac{dx}{dy}}{\sqrt{1 \quad \frac{dx}{dy}}^{2}} \qquad ...(2)$$

साथ ही P की x-अक्ष से दूरी $|y|$ है। अतः $\frac{y \quad x\frac{dx}{dy}}{\sqrt{1 \quad \frac{dx}{dy}}^{2}} = |y|$

$$\Rightarrow \left(y + x\frac{dx}{dy}\right)^2 = y^2 \;\; 1 \quad \frac{dx}{dy}^{\;2} \quad \Rightarrow \frac{dx}{dy} \;\; \frac{dx}{dy} \;\; x^2 - y^2 \quad 2xy \quad 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} \quad 0$$

या $$\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

स्थिति I: $$\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow dx = 0$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें $x = k$ प्राप्त होता है। $x = 1$ रखने पर $k = 1$ प्राप्त होता है। इसलिए वक्र का समीकरण $x = 1$ है। (यह संभव नहीं है इसलिए इसको अस्वीकार करते हैं)

स्थिति II: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2xy}{y^2 \quad x^2} \qquad \dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{y^2 \quad x^2}{2xy}$. अब $y = vx$, रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$v \quad x\frac{dv}{dx} \quad \frac{v^2x^2 \quad x^2}{2vx^2} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1}{2v} - v \;=\; \frac{-(1+v^2)}{2v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2v}{1 \quad v^2}dv \quad \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$\log(1 + v^2) = -\log x + \log c \quad \Rightarrow \log(1 + v^2)(x) = \log c \Rightarrow (1 + v^2)\, x = c$$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = cx.$ अब $x = 1$ तथा $y = 1$ रखने पर $c = 2$ प्राप्त होता है।

इसलिए $x^2 + y^2 - 2x = 0$ वाँछित समीकरण है।

उदाहरण 9 बिंदु $\left(1, \dfrac{}{4}\right)$ से जाने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि किसी बिंदु P (x, y) पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता $\dfrac{y}{x} - \cos^2\dfrac{y}{x}$ है।

हल दिए गए प्रतिबंध के आधार पर $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \cos^2\dfrac{y}{x} \qquad$ ... (i)

यह एक समघातीय अवकल समीकरण है। इसमें $y = vx$, रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$v + x\frac{dv}{dx} = v \; - \cos^2 v \qquad \Rightarrow \qquad x\frac{dv}{dx} = -\cos^2 v$$

$$\Rightarrow \qquad \sec^2 v\, dv = -\frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \tan v = -\log x + c$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\frac{y}{x} + \log x = c \qquad \text{...(ii)}$$

$x = 1$ तथा $y = \frac{}{4}$ रखने पर हमें $c = 1$ प्राप्त होता है। इस प्रकार

$$\tan \quad \frac{y}{x} \quad + \log x = 1$$ वाँछित समीकरण है।

उदाहरण 10 $x^2 \frac{dy}{dx} \quad xy = 1 + \cos\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0$ तथा जब $x = 1$ तब $y = \frac{\pi}{2}$ है को हल कीजिए।

हल दिए गए समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$x^2 \frac{dy}{dx} \quad xy = 2\cos^2\left(\frac{y}{2x}\right), x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 \frac{dy}{dx} \quad xy}{2\cos^2 \quad \frac{y}{2x}} \quad 1 \quad \Rightarrow \frac{\sec^2 \quad \frac{y}{2x}}{2} \quad x^2 \frac{dy}{dx} \quad xy \quad 1$$

दोनों पक्षों को x^3 से विभाजित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{\sec^2\left(\frac{y}{2x}\right)}{2}\left[\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}\right] = \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \quad \tan \quad \frac{y}{2x} \quad \frac{1}{x^3}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\tan \quad \frac{y}{2x} \quad \frac{1}{2x^2} \quad k$$

अब $x = 1$ तथा $y = \frac{}{2}$ रखने पर

$k = \frac{3}{2}$ इसलिए, $\tan \quad \frac{y}{2x} \quad \frac{1}{2x^2} \quad \frac{3}{2}$ वाँछित हल है।

उदाहरण 11 बताइए कि समीकरण $xdy - ydx = \sqrt{x^2 \quad y^2}\, dx$ किस प्रकार का अवकल समीकरण है तथा इसे हल कीजिए।

हल दिए गए समीकरण $x\,dy = \sqrt{x^2 \quad y^2} \quad y\,dx$,

अर्थात्,
$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{\sqrt{x^2 \quad y^2} \quad y}{x} \qquad \text{... (1)}$$

यह समीकरण एक समघातीय अवकल समीकरण है। समीकरण (1) में $y = vx$, रखने पर

$$v \quad x\frac{dv}{dx} \quad \frac{\sqrt{x^2 \quad v^2x^2} \quad vx}{x} \qquad \text{अर्थात्} \quad v \quad x\frac{dv}{dx} \quad \sqrt{1 \quad v^2} \quad v$$

$$x\frac{dv}{dx} \quad \sqrt{1 \quad v^2} \quad \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 \quad v^2}} \quad \frac{dx}{x} \qquad \text{... (2)}$$

(2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर:

$$\log\left(v + \sqrt{1 \quad v^2}\right) = \log x + \log c \Rightarrow v + \sqrt{1 \quad v^2} = cx$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{1 \quad \frac{y^2}{x^2}} = cx \qquad \Rightarrow y + \sqrt{x^2 \quad y^2} = cx^2$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

उदाहरण 12 से 21 तक प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए–

उदाहरण 12 अवकल समीकरण $\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^3 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ की घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

हल सही उत्तर (B) है।

उदाहरण 13 अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ की घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) परिभाषित नहीं है

हल सही उत्तर (D) है। दिया गया अवकल समीकरण अवकलजों में बहुपद समीकरण नहीं है। इसलिए इसकी घात परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 14 अवकल समीकरण $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$ के क्रमशः कोटि और घात हैं

(A) 1, 2 (B) 2, 2 (C) 2, 1 (D) 4, 2

हल सही उत्तर (C) है।

उदाहरण 15 दी गई त्रिज्या a के सभी वृत्तों के अवकल समीकरण की कोटि है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

हल सही उत्तर (B) है। माना दिए गए वृत्त कुल का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ है। इसमें दो स्वेच्छ अचर h और k हैं। इसलिए दिए गए अवकल समीकरण की कोटि 2 होगी।

उदाहरण 16 अवकल समीकरण $2x.\frac{dy}{dx} - y = 3$ का हल किस कुल को निरूपित करता है?

(A) सरल रेखाओं (B) वृत्तों (C) परवलयों (D) दीर्घ वृत्तों

हल सही उत्तर (C) है। दिए गए समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{2dy}{y \quad 3} \quad \frac{dx}{x} \Rightarrow 2\log(y+3) = \log x + \log c$$

$\Rightarrow$ $(y+3)^2 = cx$ सही है जो परवलयों के एक कुल को निरूपित करता है।

उदाहरण 17 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}(x \log x) + y = 2\log x$ का समाकलन गुणक है

(A) e^x (B) $\log x$ (C) $\log(\log x)$ (D) x

हल सही उत्तर (B) है। दिए गए समीकरण को $\frac{dy}{dx} \quad \frac{y}{x\log x} \quad \frac{2}{x}$ के रूप में लिख सकते हैं।

इसलिए $\qquad$ I.F. = $e^{\int \frac{1}{x\log x}dx} = e^{\log\,(\log x)} = \log x.$

उदाहरण 18 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}^{2} \quad x\frac{dy}{dx} \quad y \quad 0$ का एक हल है

(A) $y = 2$ (B) $y = 2x$ (C) $y = 2x - 4$ (D) $y = 2x^2 - 4$

हल सही उत्तर (C) है।

उदाहरण 19 निम्न में से कौन सा x और y में समघातीय फलन नहीं है।

(A) $x^2 + 2xy$ (B) $2x \quad - y$ (C) $\cos^2 \frac{y}{x} \quad \frac{y}{x}$ (D) $\sin x - \cos y$

हल सही उत्तर (D) है।

उदाहरण 20 अवकल समीकरण $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$ का हल है

(A) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c$ (B) $\log x \,.\, \log y = c$ (C) $xy = c$ (D) $x + y = c$

हल सही उत्तर (C) है। दिए गए समीकरण से हमें $\log x + \log y = \log c$ प्राप्त होता है जिससे $xy = c$ मिलता है।

उदाहरण 21 अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} \quad 2y \quad x^2$ का हल है

(A) $y = \frac{x^2 + c}{4x^2}$ (B) $y = \frac{x^2}{4} + c$ (C) $y = \frac{x^4 + c}{x^2}$ (D) $y = \frac{x^4 + c}{4x^2}$

हल सही उत्तर (D) है। I.F. = $e^{\frac{2}{x}dx} \quad e^{2\log x} \quad e^{\log x^2} \quad x^2$. इसलिए इसका हल है

$y \,.\, x^2 = \int x^2 .x dx = \frac{x^4}{4} + k$, अर्थात् $y = \frac{x^4 \quad c}{4x^2}$

उदाहरण 22 निम्नलिखित में रिक्त स्थानों को भरिए–

(i) परवलयों $y^2 = 4ax$ के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि .... है।

(ii) अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$ की घात .... है।

(iii) अवकल समीकरण $\tan x\, dx + \tan y\, dy = 0$ के विशिष्ट हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या .... है।

(iv) $F(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$ का घात ....है।

(v) अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 \log \frac{x}{y} \quad x^2}{xy \log \frac{x}{y}}$ को हल करने के लिए उपयुक्त प्रतिस्थापन .... है।

(vi) अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} - y = \sin x$ का समाकलन गणक (I.F.) .... है।

(vii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ का व्यापक हल .... है।

(viii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$ का व्यापक हल .... है।

(ix) वक्रों के कुल $y = A \sin x + B \cos x$ is को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ....है।

(x) जब $\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{dy} = 1\ (x \neq 0)$ को $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, के रूप में लिखते हैं तब $P =$ .... है।

हल

(i) एक; स्वेच्छ अचर केवल a है।

(ii) दो; क्योंकि सबसे अधिक कोटि के अवकलज की घात दो है।

(iii) शून्य; किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में कोई भी स्वेच्छ अचर नहीं होता है।

(iv) शून्य

(v) $x = vy$

(vi) $\frac{1}{x}$; दिए गए अवकल समीकरण को $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ रूप में लिख सकते हैं और इसलिए

$$\text{I.F.} = e^{\ \frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}.$$

(vii) $e^y = e^x + c$ दिए गए समीकरण से $e^y dy = e^x dx$ प्राप्त होता है।

(viii) $xy = \frac{x^2}{2} \ \ c$; I.F. $= e^{\ \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$ तथा हल $y \cdot x = \ \ x.1dx = \frac{x^2}{2} + C$ है।

(ix) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$; दिए गए फलन को x के सापेक्ष उत्तरोत्तर अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dx} = \text{A}\cos x - \text{B}\sin x \quad \text{और} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\text{A}\sin x - \text{B}\cos x$$

$\Rightarrow$ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ अवकल समीकरण है।

(x) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; दिए गए समीकरण को

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad \frac{y}{\sqrt{x}}$ अर्थात् $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ प्रकार से लिख सकते हैं।

यह $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$ प्रकार का अवकल समीकरण है।

उदाहरण 23 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य हैं–

(i) दीर्घ वृत्तों जिनका केंद्र मूल बिंदु पर तथा नाभियाँ x-अक्ष पर हैं को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि 2 है।

(ii) अवकल समीकरण $\sqrt{1+\frac{d^2y}{dx^2}} = x + \frac{dy}{dx}$ की घात परिभाषित नहीं है।

(iii) $\frac{dy}{dx}\quad y\quad 5$ एक $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ प्रकार का अवकल समीकरण है परंतु इसे चर पृथक्करणीय विधि से भी हल कर सकते हैं।

(iv) $F(x, y) = \dfrac{y\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ समघातीय फलन नहीं है।

(v) $F(x, y) = \dfrac{x^2\quad y^2}{x\quad y}$ कोटि 1 का समघातीय फलन है।

(vi) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}\quad y\quad \cos x$ का समाकलन गुणक e^x है।

(vii) अवकल समीकरण $x(1 + y^2)dx + y\,(1 + x^2)dy = 0$ का व्यापक हल $(1 + x^2)\,(1 + y^2) = k$ है।

(viii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\sec x=\tan x$ का व्यापक हल $y\,(\sec x-\tan x)=\sec x-\tan x+x+k$ है।

(ix) अवकल समीकरण $y^2\frac{dy}{dx}\quad y^2\quad 1\quad 0$ का एक हल $x + y = \tan^{-1}y$ है।

(x) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}\quad x^2\frac{dy}{dx}\quad xy\quad x$ का एक विशिष्ट हल $y = x$ है।

हल

(i) सत्य; क्योंकि दिए गए कुल को निरूपित करने वाला समीकरण $\frac{x^2}{a^2}\quad\frac{y^2}{b^2}\quad 1$ है जिसमें दो स्वेच्छ अचर हैं।

(ii) सत्य; क्योंकि यह अपने अवकलजों में बहुपद समीकरण नहीं है।

(iii) सत्य;

(iv) सत्य; क्योंकि $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\circ f(x, y)$

(v) सत्य; क्योंकि $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^1 f(x, y)$

(vi) असत्य; क्योंकि I.F = $e^{\;\;1dx} \quad e^{-x}$

(vii) सत्य; क्योंकि दिए गए समीकरण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$\frac{2x}{1 \quad x^2}dx \quad \frac{2y}{1 \quad y^2}dy$$

$\Rightarrow$ $\log(1 + x^2) = -\log(1 + y^2) + \log k$

$\Rightarrow$ $(1 + x^2)(1 + y^2) = k$

(viii) असत्य; क्योंकि I.F. = $e^{\;\sec x dx} \quad e^{\log(\sec x \quad \tan x)}$ = sec$x$ + tan$x$, इसलिए हल है

y (sec$x$ + tan$x$) = $(\sec x \quad \tan x)\tan x dx = \int(\sec x \tan x + \sec^2 x - 1)dx$

= sec$x$ + tan$x$ – x + k

(ix) सत्य; $x + y = \tan^{-1}y \Rightarrow 1 \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{1}{1 \quad y^2}\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{1+y^2} - 1\right) = 1$, अर्थात्, $\frac{dy}{dx} \quad \frac{(1 \quad y^2)}{y^2}$ जो दिए गए समीकरण

(x) असत्य, क्योंकि $y = x$, दिए गए समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

9.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न Short Answer (SA)

1. $\frac{dy}{dx} \quad 2^{y \quad x}$ का हल ज्ञात कीजिए

2. एक तल में सभी रेखाएँ जो ऊर्ध्वाधर नहीं हैं के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. दिया है कि $\frac{dy}{dx} \quad e^{\;2y}$ और जब $x = 5$ तब $y = 0$ है। जब $y = 3$ है तब x का मान ज्ञात कीजिए।

4. अवकल समीकरण $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = \dfrac{1}{x^2 \quad 1}$ को हल कीजिए।

5. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} \quad 2xy \quad y$ को हल कीजिए।

6. $\dfrac{dy}{dx} \quad ay \quad e^{mx}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

7. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} \quad 1 \quad e^{x \quad y}$ को हल कीजिए।

8. $ydx - xdy = x^2ydx$ को हल कीजिए।

9. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$, को हल कीजिए जब $y = 0, x = 0$

10. $(x + 2y^3)\dfrac{dy}{dx} = y$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

11. यदि $y(x)$ समीकरण $\dfrac{2 \quad \sin x}{1 \quad y}\dfrac{dy}{dx} = -\cos x$ का हल है और $y(0) = 1$, है तब $y \dfrac{}{2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $(1 + t)\dfrac{dy}{dt} - ty = 1$ का $y(t)$ एक हल है और $y(0) = -1$ है तो दिखाइए कि $y(1) = -\dfrac{1}{2}$

13. वह अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका व्यापक हल $y = (\sin^{-1}x)^2 + \mathrm{A}\cos^{-1}x + \mathrm{B}$ है जहाँ A और B स्वेच्छ अचर हैं।

14. उन सभी वृत्तों के समीकरण का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु से होकर जाते हैं तथा केंद्र y-अक्ष पर स्थित है।

15. उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु से होकर जाता है और अवकल समीकरण $(1 \quad x^2)\dfrac{dy}{dx} \quad 2xy \quad 4x^2$ को संतुष्ट करता है।

16. $x^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$ को हल कीजिए।

17. अवकल समीकरण $(1 + y^2) + (x - e^{\tan^{-1} y})\dfrac{dy}{dx} = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

18. $y^2 dx + (x^2 - xy + y^2)\, dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

19. $(x + y)\,(dx - dy) = dx + dy$ को हल कीजिए। [**संकेत :** dx और dy को पृथक करने के पश्चात $x + y = z$ रखिए]

20. $2\,(y + 3) - xy\,\dfrac{dy}{dx} = 0$ को हल कीजिए जबकि $y\,(1) = -2$ दिया है।

21. अवकल समीकरण $dy = \cos x\,(2 - y\,\operatorname{cosec} x)\,dx$ को हल कीजिए, दिया है कि $x = \dfrac{\pi}{2}$ तब $y = 2$ है।

22. $Ax^2 + By^2 = 1$ से A और B को विलुप्त करके अवकल समीकरण बनाइए।

23. अवकल समीकरण $(1 + y^2)\tan^{-1} x\, dx + 2y\,(1 + x^2)\, dy = 0$ को हल कीजिए।

24. केंद्र (1, 2) वाले सभी सकेंद्री वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न Long Answer (L.A.)

25. $y + \dfrac{d}{dx}(xy) = x\,(\sin x + \log x)$ को हल कीजिए।

26. $(1 + \tan y)\,(dx - dy) + 2x\,dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

27. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y) + \sin\,(x + y)$ को हल कीजिए [**संकेत :** $x + y = z$ रखिए]

28. $\dfrac{dy}{dx} \quad 3y \quad \sin 2x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

29. बिंदु (2, 1) से जाने वाले उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका किसी भी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\dfrac{x^2 \quad y^2}{2xy}$ है।

30. बिंदु (1, 0) से जाने वाले उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी भी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\dfrac{y \quad 1}{x^2 \quad x}$ है।

31. मूल बिंदु से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता इस बिंदु के x निर्देशांक (भुज) तथा y निर्देशांक (कोटि) के अंतर के वर्ग के बराबर है।

32. बिंदु (1, 1) से गुजरने वाले उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु P (x, y) से खींची गई स्पर्श रेखा, निर्देशांक अक्षों से A और B पर इस प्रकार मिलती है कि AB का मध्य बिंदु P है।

33. $x\dfrac{dy}{dx} \quad y\,(\log y - \log x + 1)$ को हल कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective type)

प्रश्न 34 से 75 तक (M.C.Q) प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

34. अवकल समीकरण $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x\sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ की घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) परिभाषित नहीं है

35. अवकल समीकरण $\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ की घात है

(A) 4 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) परिभाषित नहीं (D) 2

36. अवकल समीकरण $\dfrac{d^2y}{dx^2} \quad \dfrac{dy}{dx}^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{5}} \quad 0$, के कोटि और घात क्रमशः हैं

(A) 2 और परिभाषित नहीं (B) 2 और 2 (C) 2 और 3 (D) 3 और 3

37. यदि $y = e^{-x}$ (A$\cos x$ + B$\sin x$), तब y एक हल है

(A) $\dfrac{d^2y}{dx^2} \quad 2\dfrac{dy}{dx} \quad 0$ (B) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(C) $\dfrac{d^2y}{dx^2} \quad 2\dfrac{dy}{dx} \quad 2y \quad 0$ (D) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$

38. y = A $\cos \alpha x$ + B$\sin \alpha x$, जहाँ A और B स्वेछ अचर हैं के लिए अवकल समीकरण है

(A) $\dfrac{d^2y}{dx^2} \quad {}^2y \quad 0$ (B) $\dfrac{d^2y}{dx^2} \quad {}^2y \quad 0$

(C) $\dfrac{d^2y}{dx^2} \quad y \quad 0$ (D) $\dfrac{d^2y}{dx^2} \quad y \quad 0$

39. अवकल समीकरण $xdy - ydx = 0$ का हल निरूपित करता है एक

(A) समकोणीय अतिपरवलय (rectangular hyperbola)

(B) परवलय जिसका शीर्ष मूल बिंदु पर है

(C) मूल बिंदु से होकर जाने वाली सरल रेखा

(D) वृत्त जिसका केंद्र मूल बिंदु पर है

40. अवकल समीकरण $\cos x \frac{dy}{dx} + y\sin x = 1$ का समाकलन गुणक है।

(A) $\cos x$ (B) $\tan x$ (C) $\sec x$ (D) $\sin x$

41. अवकल समीकरण $\tan y \sec^2 x\, dx + \tan x \sec^2 y dy = 0$ का हल है।

(A) $\tan x + \tan y = k$ (B) $\tan x - \tan y = k$

(C) $\frac{\tan x}{\tan y} \quad k$ (D) $\tan x . \tan y = k$

42. $y = Ax + A^3$ द्वारा निरूपित वक्रों के कुल के अवकल समीकरण की घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

43. $\frac{xdy}{dx} - y = x^4 - 3x$ का समाकलन गुणक है :

(A) x (B) $\log x$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) $-x$

44. $\frac{dy}{dx} \quad y \quad 1$ का हल जब, $y(0) = 1$ है

(A) $xy \quad = -e^x$ (B) $xy \quad = -e^{-x}$ (C) $xy \quad = -1$ (D) $y \ = 2e^x - 1$

45. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1}$, जब $y(1) = 2$ है के हलों की संख्या है।

(A) कोई नहीं (B) एक (C) दो (D) अनंत

46. निम्न से कौन सा अवकल समीकरण कोटि 2 का है?

(A) $(y')^2 + x = y^2$ (B) $y'y'' + y = \sin x$

(C) $y''' + (y'')^2 + y = 0$ (D) $y' = \ y^2$

47. अवकल समीकरण $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 1$ का समाकलन गुणक है

(A) $-x$ (B) $\dfrac{x}{1 \quad x^2}$ (C) $\sqrt{1 \quad x^2}$ (D) $\dfrac{1}{2}\log(1-x^2)$

48. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = c$ किस अवकल समीकरण का व्यापक हल है?

(A) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ (B) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+x^2}{1+y^2}$

(C) $(1+x^2)\,dy + (1+y^2)\,dx = 0$ (D) $(1+x^2)\,dx + (1+y^2)\,dy = 0$

49. अवकल समीकरण $y\dfrac{dy}{dx} + x = c$ निरूपित करता है

(A) अतिपरवलय के कुल को (B) परवलय के कुल को

(C) दीर्घ वृत्तों के कुल को (D) वृत्तों के कुल को

50. $e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy = 0$ का व्यापक हल है

(A) $e^x \cos y = k$ (B) $e^x \sin y = k$

(C) $e^x = k \cos y$ (D) $e^x = k \sin y$

51. अवकल समीकरण $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + 6y^5 = 0$ की घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

52. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ जब $y(0) = 0$ का हल है

(A) $y = e^x(x-1)$ (B) $y = xe^{-x}$

(C) $y = xe^{-x} + 1$ (D) $y = (x+1)e^{-x}$

53. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} \quad y\tan x - \sec x \quad 0$ का समाकलन गुणक है

(A) $\cos x$ (B) $\sec x$ (C) $e^{\cos x}$ (D) $e^{\sec x}$

54. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} \quad \dfrac{1 \quad y^2}{1 \quad x^2}$ का हल है

(A) $y = \tan^{-1}x$ (B) $y - x = k(1+xy)$

(C) $x = \tan^{-1}y$ (D) $\tan(xy) = k$

55. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1+y}{x}$ का समाकलन गुणक है

(A) $\frac{x}{e^x}$ (B) $\frac{e^x}{x}$ (C) xe^x (D) e^x

56. $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ निम्न में से किस अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है

(A) $\frac{dy}{dx}\quad my\quad 0$ (B) $\frac{dy}{dx}\quad my\quad 0$ (C) $\frac{d^2y}{dx^2}\quad m^2y\quad 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2}\quad m^2y\quad 0$

57. अवकल समीकरण $\cos x \sin y\, dx + \sin x \cos y\, dy = 0$ का हल है

(A) $\frac{\sin x}{\sin y}\quad c$ (B) $\sin x \sin y = c$

(C) $\sin x + \sin y = c$ (D) $\cos x \cos y = c$

58. $x\frac{dy}{dx} + y = e^x$ का हल है

(A) $y = \frac{e^x}{x}\quad \frac{k}{x}$ (B) $y = xe^x + cx$ (C) $y = xe^x + k$ (D) $x = \frac{e^y}{y}\quad \frac{k}{y}$

59. वक्र कुल $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, जहाँ a एक स्वेच्छ अचर है का अवकल समीकरण है

(A) $(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$ (B) $2(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = xy$

(C) $2(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = xy$ (D) $(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$

60. वक्र कुल $y = Ax + A^3$ उस अवकल समीकरण के तदनुरूपी (संगत) है जिसकी कोटि है

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) परिभाषित नहीं है

61. $\frac{dy}{dx} = 2x\, e^{x^2-y}$ का व्यापक हल है

(A) $e^{x^2-y} = c$ (B) $e^{-y} + e^{x^2} = c$ (C) $e^y = e^{x^2} + c$ (D) $e^{x^2+y} = c$

62. वह वक्र जिसके लिए किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु के x-अक्ष (भुज) तथा y-अक्ष (कोटि) के अनुपात के बराबर है वह है

(A) दीर्घ वृत्त (B) परवलय (C) वृत्त (D) समकोणीय अतिपरवलय

63. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} \quad e^{\frac{x^2}{2}} + xy$ का व्यापक हल है

(A) $y \quad ce^{\frac{x^2}{2}}$ (B) $y \quad ce^{\frac{x^2}{2}}$ (C) $y = (x + c)e^{\frac{x^2}{2}}$ (D) $y \quad (c \quad x)e^{\frac{x^2}{2}}$

64. समीकरण $(2y - 1)\,dx - (2x + 3)dy = 0$ का हल है

(A) $\frac{2x \quad 1}{2y \quad 3} \quad k$ (B) $\frac{2y+1}{2x-3} = k$ (C) $\frac{2x \quad 3}{2y \quad 1} \quad k$ (D) $\frac{2x \quad 1}{2y \quad 1} \quad k$

65. अवकल समीकरण जिसका एक हल $y = a\cos x + b\sin x$ है

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} + (a + b)\,y = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} + (a - b)\,y = 0$

66. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$, $y\,(0) = 0$ का हल है

(A) $y = e^{-x}\,(x - 1)$ (B) $y = \ xe^{x}$ (C) $y = xe^{-x} + 1$ (D) $y = \ xe^{-x}$

67. अवकल समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3}^{\,2} \quad 3\frac{d^2y}{dx^2} \quad 2 \quad \frac{dy}{dx}^{\,4} \quad y^4$ की कोटि तथा घात क्रमशः है

(A) 1, 4 (B) 3, 4 (C) 2, 1 (D) 3, 2

68. अवकल समीकरण $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \frac{d^2y}{dx^2}$ की कोटि तथा घात क्रमशः है

(A) 2, $\frac{3}{2}$ (B) 2, 3 (C) 2, 1 (D) 3, 4

69. वक्र कुल $y^2 = 4a\,(x + a)$ का अवकल समीकरण है

(A) $y^2 = 4\frac{dy}{dx}\left(x + \frac{dy}{dx}\right)$ (B) $2y\frac{dy}{dx} \quad 4a$

(C) $y\frac{d^2y}{dx^2} \quad \frac{dy}{dx}^{\,2} \quad 0$ (D) $2x\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y$

70. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ का निम्न में से कौन सा व्यापक हल है

(A) $y = (Ax + B)e^x$ (B) $y = (Ax + B)e^{-x}$

(C) $y = Ae^x + Be^{-x}$ (D) $y = A\cos x + B\sin x$

71. $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x$ व्यापक हल है

(A) $y \sec x = \tan x + c$ (B) $y \tan x = \sec x + c$

(C) $\tan x = y \tan x + c$ (D) $x \sec x = \tan y + c$

72. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} \quad \frac{y}{x} \quad \sin x$ का हल है

(A) $x\,(y + \cos x) = \sin x + c$ (B) $x\,(y - \cos x) = \sin x + c$

(C) $xy \cos x = \sin x + c$ (D) $x\,(y + \cos x) = \cos x + c$

73. अवकल समीकरण $(e^x + 1)\, y dy = (y + 1)\, e^x dx$ का व्यापाक हल है

(A) $(y + 1) = k\,(e^x + 1)$ (B) $y + 1 = e^x + 1 + k$

(C) $y = \log \{k\,(y + 1)\,(e^x + 1)\}$ (D) $y \quad \log \frac{e^x \quad 1}{y \quad 1} \quad k$

74. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ का हल है

(A) $y = e^{x-y} - x^2 e^{-y} + c$ (B) $e^y - e^x = \frac{x^3}{3} + c$

(C) $e^x + e^y = \frac{x^3}{3} + c$ (D) $e^x - e^y = \frac{x^3}{3} + c$

75. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} \quad \frac{2xy}{1 \quad x^2} \quad \frac{1}{(1 \quad x^2)^2}$ का हल है

(A) $y\,(1 + x^2) = c + \tan^{-1}x$ (B) $\frac{y}{1 \quad x^2} = c + \tan^{-1}x$

(C) $y \log\,(1 + x^2) = c + \tan^{-1}x$ (D) $y\,(1 + x^2) = c + \sin^{-1}x$

76. नीचे दिए गए प्रश्नों (i से xi तक) में रिक्त स्थान भरिए–

(i) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} \quad e^{\frac{dy}{dx}} \quad 0$ की घात .... है।

(ii) अवकल समीकरण $\sqrt{1 \quad \frac{dy}{dx}^{2}}$ x की घात .... है।

(iii) कोटि तीन के अवकल समीकरण के व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या .... है।

(iv) $\frac{dy}{dx} \quad \frac{y}{x\log x} \quad \frac{1}{x}$ इस .... प्रकार का समीकरण है।

(v) $\frac{dx}{dy}+P_1 y = Q_1$ प्रकार के अवकल समीकरण का व्यापक हल .... है।

(vi) अवकल समीकरण $\frac{xdy}{dx} \quad 2y \quad x^2$ का हल .... है।

(vii) $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$ का हल .... है।

(viii) अवकल समीकरण $ydx + (x + xy)dy = 0$ का हल .... है।

(ix) $\frac{dy}{dx} \quad y = \sin x$ का व्यापक हल .... है।

(x) अवकल समीकरण $\cot y \, dx = xdy$ का हल .... है।

(xi) $\frac{dy}{dx} \quad y \quad \frac{1 \quad y}{x}$ का समाकलन गुणक .... है।

77. बताइए कि दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य हैं?

(i) अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} + p_1 x = Q_1$ के समाकलन गुणक को $e^{\int p_1 dy}$ से लिखा जाता है।

(ii) $\frac{dx}{dy} + p_1 x = Q_1$ प्रकार के अवकल समीकरण के हल को

$x\,(\text{I.F.}) = \quad (\text{I.F}) \quad Q_1 dy$ द्वारा दिया जाता है।

(iii) $\frac{dy}{dx} \quad f(x, y)$, जहाँ $f(x, y)$ एक शून्य घात वाला समघातीय फलन है, को हल करने के लिए सही प्रतिस्थापन $y = vx$ है।

(iv) $\frac{dx}{dy} \quad g(x,y)$ जहाँ $g(x, y)$ एक शून्य घात वाला समघातीय फलन है, प्रकार के अवकल समीकरण को हल करने के लिए सही प्रतिस्थापन $x = vy$ है।

(v) द्वितीय कोटि के अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या दो होती है।

(vi) वृत्तों के कुल $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि दो होगी।

(vii) $\frac{dy}{dx} \quad \frac{y}{x}^{\frac{1}{3}}$ का हल $y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = c$ है।

(viii) वक्रों के कुल $y = e^x$ (A$\cos x$ + B$\sin x$) को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} \quad 2y \quad 0$ है।

(ix) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x}$ का हल $x + y = kx^2$ है।

(x) $\frac{xdy}{dx} \quad y \quad x\tan\frac{y}{x}$ का हल $\sin \quad \frac{y}{x} \quad cx$ है।

(xi) एक तल में सभी अक्षैतिज (रेखाएँ जो क्षैतिज नहीं हैं) सरल रेखाओं का अवकल समीकरण $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ है।

अध्याय 10

सदिश बीजगणित

10.1 समग्र अवलोकन (Overview)

10.1.1 एक ऐसी राशि जिसमें परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं, **सदिश कहलाती** है।

10.1.2 सदिश $\vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ होता है और जिसे $\hat{a}$ से निरूपित करते हैं।

10.1.3 किसी बिंदु P (x, y, z) की स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ होता है और इसका परिमाण $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ होता है, जहाँ O मूल बिंदु है।

10.1.4 एक सदिश के अदिश घटक इसके दिक्-अनुपात होते हैं और क्रमागत अक्षों के साथ इसके 'प्रक्षेप' को निरूपित करते हैं।

10.1.5 एक सदिश का परिमाण r, दिक्-अनुपात (a, b, c) और दिक्-कोसाइन l, m, n निम्नलिखित रूप से संबंधित हैं :

$$l = \frac{a}{r},\ m = \frac{b}{r},\ n = \frac{c}{r}$$

10.1.6 त्रिभुज की तीनों भुजाओं को क्रमागत निरूपित करने वाले सदिशों का योग $\vec{0}$ होता है।

10.1.7 सदिश के योग के त्रिभुज नियम के अनुसार "यदि दो सदिशों को किसी त्रिभुज की दो क्रमागत भुजाओं से निरूपित किया जाए, तो उनका योग या परिणामी सदिश उस त्रिभुज की विपरीत क्रम में ली गई तीसरी भुजा से निरूपित होता है।"

10.1.8 ***अदिश गुणन*** यदि $\vec{a}$ एक दिया हुआ सदिश है और λ एक अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक सदिश है, जिसका परिमाण $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$. यदि λ धनात्मक है तो $\lambda\vec{a}$ की दिशा $\vec{a}$ की दिशा के समान होती है तथा यदि λ ऋणात्मक है तो $\lambda\vec{a}$ की दिशा $\vec{a}$ की दिशा के विपरीत होती है।

10.1.9 *दो बिंदुओं को मिलाने वाला सदिश* यदि $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ और $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ कोई दो बिंदु हैं

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} + (z_2 - z_1)\,\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

10.1.10 *खंड सूत्र* (Section formula)

एक बिंदु R का स्थित सदिश, जो बिंदु P और Q, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है को

(i) $m : n$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है, $\dfrac{n\vec{a} \quad m\vec{b}}{m \quad n}$ होता है

(ii) $m : n$ के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है, $\dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$ होता है

10.1.11 सदिश $\vec{a}$ का $\vec{b}$ के अनुदिश प्रक्षेप $\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ होता है और $\vec{a}$ का $\vec{b}$ के अनुदिश प्रक्षेप सदिश

$\left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}\,|}\right)\vec{b}$ होता है।

10.1.12 *अदिश गुणनफल (Scalar or dot product)* दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ जिनके बीच का कोण θ है, का अदिश गुणनफल $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}\,|\,|\vec{b}\,|\cos\theta$ द्वारा परिभाषित है।

10.1.13 *सदिश गुणनफल (Vector or cross product)* दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$, जिनके बीच का कोण θ है, का सदिश गुणनफल $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}\,|\,|\vec{b}\,|\sin\theta\ \hat{n}$, जहाँ $\hat{n}$ एक मात्रक सदिश है जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को अंतर्विष्ट करने वाले तल पर लंब है और $\vec{a}, \vec{b}, \hat{n}$ एक दक्षिणावर्ती पद्धति निर्मित करते हैं।

10.1.14 यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ दो सदिश हैं तथा λ एक अदिश है तब

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{i} + (a_2c_1 - c_1c_2)\hat{j} + (a_1b_b - a_2b_1)\hat{k}$$

दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण निम्नलिखित नियम से प्राप्त होता है–

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

10.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न Short Answer (S.A.)

उदाहरण 1 सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ के योग के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\vec{c}$, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के योग को व्यक्त करता है। तब

$$\vec{c} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + (-\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} + 5\hat{k}$$

अब $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

इसलिए, अभीष्ट मात्रक सदिश $\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(\hat{i} + 5\hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{26}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{26}}\hat{k}$

उदाहरण 2 यदि बिंदु P और Q क्रमश: (1, 3, 2) और (–1, 0, 8) है, तो $\overrightarrow{PQ}$, के विपरीत दिशा में परिमाण 11 का एक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल सदिश जिसका प्रारंभिक बिंदु P (1, 3, 2) है और अंतिम बिंदु Q (–1, 0, 8) है, निम्नलिखित है

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-1)\,\hat{i} + (0-3)\,\hat{j} + (8-2)\,\hat{k} = -2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 6\,\hat{k}$$

इसलिए $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

इस प्रकार, $\overrightarrow{QP}$ की दिशा में मात्रक सदिश $\widehat{QP} = \dfrac{\overrightarrow{QP}}{|\overrightarrow{QP}|} = \dfrac{2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{7}$ है।

अत: $\overrightarrow{QP}$ की दिशा में परिमाण 11 का अभीष्ट सदिश निम्नलिखित है

$$11\,\widehat{QP} = 11\left(\frac{2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{7}\right) = \frac{22}{7}\hat{i} + \frac{33}{7}\hat{j} - \frac{66}{7}\hat{k}.$$

उदाहरण 3 P और Q दो बिंदुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $\overrightarrow{OP} = 2\vec{a} + \vec{b}$ और $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} - 2\vec{b}$ हैं। एक ऐसे बिंदु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए जो PQ को 1:2 के अनुपात में (i) अंत: और (ii) बाह्यत: विभाजित करता है।

हल (i) P और Q को 1:2 के अनुपात में अंत: विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश निम्नलिखित है

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(2\vec{a} + \vec{b}) + 1(\vec{a} - 2\vec{b})}{1+2} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) P और Q को 1: 2 के अनुपात में बाह्यत: विभाजित करने वाले बिंदु R′ का स्थिति सदिश निम्नलिखित है

$$\overrightarrow{OR'} = \frac{2(2\vec{a} + \vec{b}) - 1(\vec{a} - 2\vec{b})}{2-1} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$$

उदाहरण 4 यदि बिंदु (–1, –1, 2), (2, m, 5) और (3,11, 6) संरेखी, हैं तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि दिए हुए बिंदु A (–1, –1, 2), B (2, m, 5) और C (3, 11, 6) हैं।

तब $\overrightarrow{AB} = (2+1)\,\hat{i} + (m+1)\,\hat{j} + (5-2)\,\hat{k} = 3\,\hat{i} + (m+1)\,\hat{j} + 3\hat{k}$

और $\qquad \overrightarrow{AC} = (3+1)\,\hat{i} + (11+1)\,\hat{j} + (6-2)\,\hat{k} \quad = 4\,\hat{i} + 12\,\hat{j} + 4\hat{k}$

क्योंकि A, B, C, संरेखी है, $\overrightarrow{AB} = \lambda\, \overrightarrow{AC}$, अर्थात्,

$$(3\,\hat{i} \quad (m \quad 1)\,\hat{j} \quad 3\hat{k}) \quad \lambda(4\hat{i}+12\hat{j}+4\hat{k})$$

$\Rightarrow \qquad 3 = 4\,\lambda$ और $m + 1 = 12\,\lambda$

इसलिए $\qquad m = 8$

उदाहरण 5 परिमाण $3\sqrt{2}$ का एक सदिश $\vec{r}$ ज्ञात कीजिए जो y और z -अक्षों से क्रमशः कोण $\frac{\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{2}$ बनाता है।

हल यहाँ $m = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ और $n = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

इसलिए $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ से

$$l^2 + \frac{1}{2} + 0 \quad = 1$$

$$\Rightarrow \qquad l \;=\; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

अतः अभीष्ट सदिश $\vec{r} = 3\sqrt{2}\ \ (l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k})$

$$\vec{r} = 3\sqrt{2}\ (\ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} \quad 0\,\hat{k}) \Rightarrow \vec{r} = \pm 3\hat{i} + 3\,\hat{j}$$

उदाहरण 6 यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, तो λ का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे $\vec{a}$ सदिश $\vec{b} \quad \vec{c}$ पर लंब हो।

हल हम जानते हैं कि

$$\lambda \vec{b} + \vec{c} = \lambda\ (\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}\ ) + (\ \hat{i} + 3\ \hat{j} - \hat{k}\ )$$

$$= (\ \lambda + 1)\ \ \hat{i} + (\lambda + 3\ )\ \hat{j} - (2\lambda + 1)\ \hat{k}$$

क्योंकि $\vec{a} \perp (\lambda \vec{b} + \vec{c}\,)$ इसलिए $\vec{a}\,.(\lambda \vec{b} + \vec{c}\,) = 0$

$$\Rightarrow (2\ \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\,)\,.\,[(\ \lambda + 1)\ \hat{i} + (\lambda + 3)\ \ \hat{j} - (2\lambda + 1)\hat{k}\,] = 0$$

$$\Rightarrow 2\ (\lambda + 1) - (\lambda + 3)\ \ - (2\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\,2$$

उदाहरण 7 परिमाण $10\sqrt{3}$ वाले उन सभी सदिशों को ज्ञात कीजिए जो $\hat{i}\quad 2\hat{j}\quad \hat{k}$ और $\hat{i}\quad 3\hat{j}\quad 4\hat{k}$ को अंतर्विष्ट करने वाले तल पर लंब हो।

हल मान लीजिए कि $\vec{a} = \hat{i}\quad 2\hat{j}\quad \hat{k}$ और $\vec{b} = \quad \hat{i}\quad 3\hat{j}\quad 4\hat{k}$ तब

$$\vec{a}\quad \vec{b}\quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}\quad \hat{i}(8\quad 3)\quad \hat{j}(4\quad 1)\quad \hat{k}(3\quad 2) = 5\hat{i} - 5\,\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\Rightarrow \qquad |\vec{a}\quad \vec{b}|\quad \sqrt{(5)^2\quad (\ \ 5)^2\quad (5)^2}\quad \sqrt{3(5)^2}\quad 5\sqrt{3}$$

इसलिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लंबवत मात्रक सदिश निम्नलिखित है

$$\frac{\vec{a}\quad \vec{b}}{|\vec{a}\quad \vec{b}|}\quad \frac{5\hat{i}\quad 5\hat{j}\quad 5\hat{k}}{5\sqrt{3}}$$

अत: $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लंबवत $10\sqrt{3}$ परिमाण वाला सदिश $10\sqrt{3}\quad \dfrac{5\hat{i}\quad 5\hat{j}\quad 5\hat{k}}{5\sqrt{3}}$,

अर्थात् $10(\hat{i}\quad \hat{j}\quad \hat{k})$ हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 8 सदिशों के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि cos (A – B) = cosA cosB + sinA sinB

हल माना $\vec{OP}$ और $\vec{OQ}$, मात्रक सदिश हैं जो x-अक्ष की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः A और B कोण बनाते हैं। तब $\angle QOP = A - B$ [आकृति 10.1]

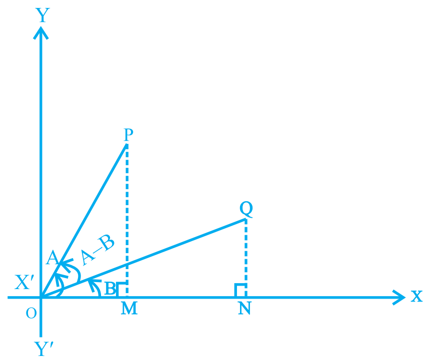
हम जानते हैं कि $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} = \hat{i}\cos A + \hat{j}\sin A$ और

$\vec{OQ} = \vec{ON} + \vec{NQ} = \hat{i}\cos B + \hat{j}\sin B$.

परिभाषा से $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = |\vec{OP}|\,|\vec{OQ}| \cos (A-B)$

$= \cos (A - B)$ ... (1)

$\left(\text{क्योंकि } |\vec{OP}| = 1 = |\vec{OQ}| \right)$



आकृति 10.1

घटकों के पदों में,

$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = (\hat{i}\cos A + \hat{j}\sin A)\cdot(\hat{i}\cos B + \hat{j}\sin B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ ... (2)

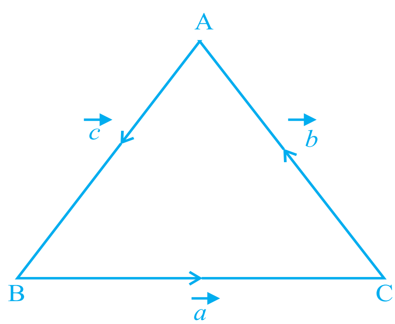
(1) और (2), से

cos (A – B) = cosA cosB + sinA sinB

उदाहरण 9 सिद्ध कीजिए कि किसी ΔABC, में $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, जहाँ a, b, c क्रमशः A, B, C शीर्षों की सम्मुख भुजाओं के परिमाण को निरूपित करते हैं।

हल मान लीजिए कि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ द्वारा निरूपित त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः BC, CA और AB हैं [आकृति 10.2].

हम जानते हैं कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. अर्थात् $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$



आकृति 10.2

उपर्युक्त समिका का $\vec{a}$ द्वारा बाएँ ओर से सदिश गुणनफल

तथा $\vec{b}$ द्वारा दाहिने ओर से सदिश गुणनफल प्राप्त करके सरल करने पर

$$\vec{a}\quad \vec{b}\quad \vec{b}\quad \vec{c}\quad \vec{c}\quad \vec{a}$$

$\Rightarrow$ $$|\vec{a}\quad \vec{b}|\quad |\vec{b}\quad \vec{c}|\quad |\vec{c}\quad \vec{a}|$$

$\Rightarrow$ $$|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\quad - C)\quad |\vec{b}||\vec{c}|\sin(\quad - A)\quad |\vec{c}||\vec{a}|\sin(\quad - B)$$

$\Rightarrow$ $$ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$$

प्रत्येक पद को abc से भाग देने पर

$$\frac{\sin C}{c}\quad \frac{\sin A}{a}\quad \frac{\sin B}{b} \text{ अर्थात् } \frac{\sin A}{a}\quad \frac{\sin B}{b}\quad \frac{\sin C}{c}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 10 से 21 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

उदाहरण 10 सदिश $6\hat{i}\quad 2\hat{j}\quad 3\hat{k}$ का परिमाण है

(A) 5 (B) 7 (C) 12 (D) 1

हल सही उत्तर (B) है।

उदाहरण 11 उस बिंदु का स्थिति सदिश, जो दो बिंदुओं, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}\quad \vec{b}$ और $2\vec{a}\quad \vec{b}$ हैं, को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है,

(A) $\dfrac{3\vec{a}\quad 2\vec{b}}{3}$ (B) $\vec{a}$ (C) $\dfrac{5\vec{a}\quad \vec{b}}{3}$ (D) $\dfrac{4\vec{a}\quad \vec{b}}{3}$

हल सही उत्तर (D) है। खंड सूत्र के प्रयोग से अभीष्ट बिंदु का स्थिति सदिश निम्नलिखित है

$$\frac{2(\vec{a}\quad \vec{b})\quad 1(2\vec{a}\quad \vec{b})}{2\quad 1}\quad \frac{4\vec{a}\quad \vec{b}}{3}$$

उदाहरण 12 प्रारंभिक बिंदु P (2, – 3, 5) और अंतिम बिंदु Q(3, – 4, 7) वाला सदिश है

(A) $\hat{i}\quad \hat{j}\quad 2\hat{k}$ (B) $5\hat{i}\quad 7\hat{j}\quad 12\hat{k}$ (C) $\quad \hat{i}\quad \hat{j}\quad 2\hat{k}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (A) है।

उदाहरण 13 सदिश $\hat{i}\quad \hat{j}$ और सदिश $\hat{j}\quad \hat{k}$ के बीच का कोण है

(A) $\frac{\ }{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{\ }{3}$ (D) $\frac{5}{6}$

हल सही उत्तर (B) है। सूत्र $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$ का प्रयोग कीजिए।

उदाहरण 14 x का वह मान जिसके लिए सदिश $2\hat{i}\quad \hat{j}\quad 2\hat{k}$ और सदिश $3\hat{i}\quad \hat{j}\quad \hat{k}$ लंबवत है तो λ बराबर है

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

हल सही उत्तर (D) है।

उदाहरण 15 समांतर चतुर्भुज, का क्षेत्रफल जिसकी संलग्न भुजाएँ $\hat{i}\quad \hat{k}$ और $2\hat{i}\quad \hat{j}\quad \hat{k}$ है

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 3 (D) 4

हल सही उत्तर (B) है। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी संलग्न भुजाएँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं $|\vec{a}\quad \vec{b}|$ होता है।

उदाहरण 16 यदि $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}|\quad 3$ और $|\vec{a}\quad \vec{b}|\quad 12$ है, तो $\vec{a}.\vec{b}$ बराबर है

(A) $6\sqrt{3}$ (B) $8\sqrt{3}$ (C) $12\sqrt{3}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (C) है। सूत्र $|\vec{a}\quad \vec{b}|\quad |\vec{a}|.|\vec{b}||\sin\theta|$ के प्रयोग से $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ ।

इसलिए, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\quad = 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

उदाहरण 17 दो सदिश $\hat{j}+\hat{k}$ और $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ किसी ΔABC की क्रमशः दो भुजाओं AB और AC को निरूपित करते हैं। बिंदु A से हो कर जाने वाली मध्यिका (मीडियन) की लंबाई है

(A) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{48}}{2}$ (C) $\sqrt{18}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (A) है। मध्यिका $\overrightarrow{AD}$ को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं।

$$|\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}|3\hat{i}+5\hat{k}| = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

उदाहरण 18 सदिश $\vec{a}\ \ 2\hat{i}\ \ \hat{j}\ \ \hat{k}$ का सदिश $\vec{b}\ \ \hat{i}\ \ 2\hat{j}\ \ 2\hat{k}$ के अनुदिश प्रक्षेप बराबर है

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{6}$

हल सही उत्तर (A) है। सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ के अनुदिश प्रक्षेप

$$\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(2\hat{i}\ \ \hat{j}\ \ \hat{k}).(\hat{i}\ \ 2\hat{j}\ \ 2\hat{k})}{\sqrt{1\ \ 4\ \ 4}} = \frac{2}{3} \text{ ।}$$

उदाहरण 19 यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ मात्रक सदिश हैं तो $\sqrt{3}\vec{a}\ \ \vec{b}$ के मात्रक सदिश होने के लिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच क्या कोण होगा?

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

हल सही उत्तर (A) है। हम जानते हैं कि $(\sqrt{3}\vec{a}\ \ \vec{b})^2\ \ 3\vec{a}^2\ \ \vec{b}^2\ \ 2\sqrt{3}\,\vec{a}.\vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta = 30°$$

उदाहरण 20 एक मात्रक सदिश जो सदिशों $\hat{i}\ \ \hat{j}$ और $\hat{i}\ \ \hat{j}$ दोनों के लंबवत है तथा एक दक्षिणावर्ती पद्धति को निर्मित करने वाला सदिश है।

(A) $\hat{k}$ (B) $-\hat{k}$ (C) $\frac{\hat{i}\quad\hat{j}}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{\hat{i}\quad\hat{j}}{\sqrt{2}}$

हल सही उत्तर (A) है। अभीष्ट मात्रक सदिश $\frac{\hat{i}\quad\hat{j}\quad\hat{i}\quad\hat{j}}{\left|\hat{i}\quad\hat{j}\quad\hat{i}\quad\hat{j}\right|} = \frac{2\hat{k}}{2}\quad\hat{k}$ है।

उदाहरण 21 यदि $|\vec{a}|\quad 3$ और $-1\quad k\quad 2$ है तो $|k\vec{a}|$ निम्नलिखित में से किस अंतराल में है?

(A) [0, 6] (B) [– 3, 6] (C) [3, 6] (D) [1, 2]

हल सही उत्तर (A) है। $|k\vec{a}|$ का न्यूनतम मान, k, के न्यूनतम संख्यात्मक मान पर होगा। अर्थात् जब $k = 0$ हो और तब $|k\vec{a}|\quad |k||\vec{a}|\quad 0\quad 3\quad 0$, k का संख्यात्मक अधिकतम मान 2 है जिस पर $|k\vec{a}|\quad 6$

10.3 प्रश्नावली

लघुउत्तरीय प्रश्न Short Answer (S.A.)

1. सदिश $\vec{a}\quad 2\hat{i}\quad\hat{j}\quad\hat{k}$ और $\vec{b}\quad 2\hat{j}\quad\hat{k}$ के योग के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\vec{a}\quad\hat{i}\quad\hat{j}\quad 2\hat{k}$ और $\vec{b}\quad 2\hat{i}\quad\hat{j}\quad 2\hat{k}$, की दिशाओं में मात्रक सदिश है

(i) $6\vec{b}$ (ii) $2\vec{a}\quad\vec{b}$

3. $\overrightarrow{PQ}$, की दिशा में मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ P और Q के निर्देशांक क्रमशः (5, 0, 8) और (3, 3, 2) हैं।

4. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ बिंदु A और B के क्रमशः स्थिति सदिश हैं तथा बढ़ाई गई BA में एक बिंदु C इस प्रकार है कि BC = 1.5 BA, तो C का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

5. सदिशों के प्रयोग से k का मान ज्ञात कीजिए ताकि बिंदु (k, – 10, 3), (1, –1, 3) और (3, 5, 3) संरेखी हों।

6. एक सदिश $\vec{r}$ तीनों अक्षों से समान कोण पर झुका हुआ है। यदि $\vec{r}$ का परिमाण $2\sqrt{3}$ इकाई है तो $\vec{r}$ ज्ञात कीजिए।

7. एक सदिश $\vec{r}$ का परिमाण 14 है तथा दिक्-अनुपात 2, 3, – 6 हैं। $\vec{r}$ के दिक्-कोसाइन और घटक ज्ञात कीजिए जब कि यह दिया है कि x-अक्ष से $\vec{r}$ न्यून कोण बनता है।

8. परिमाण 6 का एक सदिश ज्ञात कीजिए जो दोनों ही सदिशों $2\hat{i} \quad \hat{j} \quad 2\hat{k}$ और $4\hat{i} - \hat{j} \quad 3\hat{k}$ पर लंब है।

9. सदिशों $2\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ और $3\hat{i} \quad 4\hat{j} \quad \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

10. यदि $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad 0$, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{c} \quad \vec{a}$ इस परिणाम का ज्यामितीय विमोचन कीजिए।

11. सदिश $\vec{a} \quad 3\hat{i} \quad \hat{j} \quad 2\hat{k}$ तथा सदिश $\vec{b} \quad 2\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 4\hat{k}$ के बीच का sine ज्ञात कीजिए।

12. यदि A, B, C, D बिंदुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$, $2\hat{i} \quad \hat{j} \quad 3\hat{k}$, $2\hat{i} \quad 3\hat{k}$, $3\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad \hat{k}$, है तो $\overrightarrow{AB}$ का $\overrightarrow{CD}$ अनुदिश प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

13. सदिशों के प्रयोग से त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि जिसके शीर्ष A(1, 2, 3), B(2, – 1, 4) और C(4, 5, – 1) है।

14. सदिशों के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

15. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज ABC में $\cos A \quad \dfrac{b^2 \quad c^2 - a^2}{2bc}$, होता है जहाँ a, b, c क्रमशः शीर्षों A, B, C, की सम्मुख भुजाओं के परिमाण हैं।

16. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ किसी त्रिभुज के शीर्षों को निर्धारित करते हैं तो, सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल $\dfrac{1}{2} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{a} \quad \vec{b}$ है। इसके प्रयोग से तीन बिंदुओं $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के संरेखी होने के प्रतिबंध का निगमन कीजिए। साथ ही त्रिभुज के तल पर अभिलंब मात्रक सदिश भी ज्ञात कीजिए।

17. सिद्ध कीजिए कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, जिसके विकर्ण $\vec{a}$ और $\vec{b}$ द्वारा व्यक्त हैं, $\dfrac{|\vec{a} \quad \vec{b}|}{2}$ है। साथ ही उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण $2\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ और $\hat{i} \quad 3\hat{j} \quad \hat{k}$ है।

18. यदि $\vec{a} = \hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ और $\vec{b} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ तो सदिश $\vec{c}$ ज्ञात कीजिए इस प्रकार कि $\vec{a} \quad \vec{c} \quad \vec{b}$ और $\vec{a} . \vec{c} \quad 3$.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 19 से 33 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

19. सदिश $\hat{i}\quad 2\hat{j}\quad 2\hat{k}$ की दिशा में परिमाण 9 वाला सदिश है

(A) $\hat{i}\quad 2\hat{j}\quad 2\hat{k}$ (B) $\dfrac{\hat{i}\quad 2\hat{j}\quad 2\hat{k}}{3}$ (C) $3(\hat{i}\quad 2\hat{j}\quad 2\hat{k})$ (D) $9(\hat{i}\quad 2\hat{j}\quad 2\hat{k})$

20. बिंदु $2\vec{a}\quad 3\vec{b}$ और $\vec{a}\quad \vec{b}$ को मिलाने वाले रेखाखंड को 3 : 1 में विभाजित करने वाले बिंदु का स्थिति सदिश है

(A) $\dfrac{3\vec{a}\quad 2\vec{b}}{2}$ (B) $\dfrac{7\vec{a}\quad 8\vec{b}}{4}$ (C) $\dfrac{3\vec{a}}{4}$ (D) $\dfrac{5\vec{a}}{4}$

21. सदिश जिसका प्रारंभिक और अंतिम बिंदु क्रमशः (2, 5, 0) और (–3, 7, 4) है निम्नलिखित है

(A) $\hat{i}\quad 12\hat{j}\quad 4\hat{k}$ (B) $5\hat{i}\quad 2\hat{j}\quad 4\hat{k}$ (C) $5\hat{i}\quad 2\hat{j}\quad 4\hat{k}$ (D) $\hat{i}\quad \hat{j}\quad \hat{k}$

22. दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ और 4 हैं तथा $\vec{a}.\vec{b}\quad 2\sqrt{3}$ है। इनके बीच का कोण है

(A) $\dfrac{}{6}$ (B) $\dfrac{}{3}$ (C) $\dfrac{}{2}$ (D) $\dfrac{5}{2}$

23. यदि सदिश $\vec{a}\quad 2\hat{i}\quad \hat{j}\quad \hat{k}$ और $\vec{b}\quad \hat{i}\quad 2\hat{j}\quad 3\hat{k}$ लांबिक (orthogonol) हों तो λ का मान है

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $-\dfrac{5}{2}$

24. यदि सदिश $3\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ और $2\hat{i}-4\hat{j}+\lambda\hat{k}$ समांतर हैं तो λ का मान है

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{5}{2}$ (D) $\dfrac{2}{5}$

25. मूल बिंदु से A और B बिंदुओं के सदिश क्रमशः $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ हों तो त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल है

(A) 340 (B) $\sqrt{25}$ (C) $\sqrt{229}$ (D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{229}$

26. किसी भी सदिश $\vec{a}$ के लिए $(\vec{a}\ \ \hat{i})^2\ \ (\vec{a}\ \ \hat{j})^2\ \ (\vec{a}\ \ \hat{k})^2$ का मान बराबर है

(A) $\vec{a}^2$ (B) $3\vec{a}^2$ (C) $4\vec{a}^2$ (D) $2\vec{a}^2$

27. यदि $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$ और $\vec{a}.\vec{b}\ \ 12$ हो तो $|\vec{a}\ \ \vec{b}|$ का मान है

(A) 5 (B) 10 (C) 14 (D) 16

28. सदिश $\lambda\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k},\ \hat{i}+\lambda\hat{j}-\hat{k}$ और $2\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k}$ समतलीय हैं यदि

(A) $\lambda = -2$ (B) $\lambda = 0$ (C) $\lambda = 1$ (D) $\lambda = -1$

29. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ इस प्रकार के मात्रक सदिश हैं कि $\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\ \ \vec{0}$ है तो $\vec{a}.\vec{b}\ \ \vec{b}.\vec{c}\ \ \vec{c}.\vec{a}$ का मान

(A) 1 (B) 3 (C) $-\frac{3}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं है

30. सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप

(A) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\ \vec{b}$ (B) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$ (C) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$ (D) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\ \hat{b}$ है

31. यदि तीन सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ इस प्रकार हैं कि $\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\ \ \vec{0}$ और $|\vec{a}|\ \ 2, |\vec{b}|\ \ 3, |\vec{c}|\ \ 5$ है, तो $\vec{a}.\vec{b}\ \ \vec{b}.\vec{c}\ \ \vec{c}.\vec{a}$ का मान

(A) 0 (B) 1 (C) – 19 (D) 38 है

32. यदि $|\vec{a}|\ \ 4$ और $3\ \ \ \ 2$ है तो $|\ \ \vec{a}|$ का अंतराल है

(A) [0, 8] (B) [– 12, 8] (C) [0, 12] (D) [8, 12]

33. सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{j}+\hat{k}$ दोनों ही पर मात्रक लंब सदिशों की संख्या है

(A) एक (B) दो (C) तीन (D) असंख्य

प्रश्न 34 से 40 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

34. सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ असंरेखी सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच के कोण को समद्विभाजित करता है यदि

____

35. यदि किसी शून्येतर सदिश $\vec{r}$ के लिए $\vec{r}\cdot\vec{a}=0, \vec{r}\cdot\vec{b}=0,$ और $\vec{r}\cdot\vec{c}=0$ तब $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ का मान ________ के बराबर है।

36. सदिश $\vec{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b}=-\hat{i}-2\hat{k}$ एक समांतर चतुर्भुज है। इसके विकर्णों के बीच का न्यूनकोंण ________ है।

37. यदि k के मानों के लिए $|k\vec{a}|<|\vec{a}|$ और $k\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}$ सदिश $\vec{a}$ के समांतर है, तो k के मान ________ हैं।

38. व्यंजक $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ का मान ________ है।

39. यदि $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=144$ और $|\vec{a}|=4$, तो $|\vec{b}|$ ________ के बराबर है।

40. यदि $\vec{a}$ कोई शून्येतर सदिश है तो $(\vec{a}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{a}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{a}\cdot\hat{k})\hat{k}$ ________ के बराबर है।

बतलाइए कि निम्नलिखित प्रश्नों के कथन सत्य हैं या असत्य–

41. यदि $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, तो यह आवश्यक है कि $\vec{a}=\pm\vec{b}$ है।

42. किसी बिंदु P का स्थिति सदिश का प्रारंभिक बिंदु मूल बिंदु होता है।

43. यदि $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$, है तब सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ लांबिक (orthogonol) हैं।

44. सूत्र $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\times\vec{b}$ शून्येतर $\vec{a}$ और $\vec{b}$ सदिशों के लिए सत्य है।

45. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समचतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ हैं तब $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ है।

अध्याय 11

त्रिविमयि ज्यामिति

11.1 समग्र अवलोकन (Overview)

11.1.1 किसी रेखा की दिक्कोज्याएँ उन कोणों की कोज्याएँ (cosines) हैं जो वह रेखा निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ बनाती है।

11.1.2 यदि l, m, n किसी रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं, तो $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ होता है।

11.1.3 दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्कोज्याएँ होती हैं:

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}, \text{ जहाँ}$$

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ है।}$$

11.1.4 किसी रेखा के दिक्-अनुपात वे संख्याएँ हैं जो उस रेखा की दिक्कोज्याओं के समानुपाती होती हैं।

11.1.5 यदि किसी रेखा की l, m, n दिक्कोज्याएँ हैं और a, b, c दिक्अनुपात हैं, तो

$$l = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};\ m = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};\ n = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

11.1.6 विषमतलीय रेखाएँ त्रिविमीय आकाश (space)में ऐसी रेखाएँ होती हैं जो न समांतर हैं और न ही प्रतिच्छेदी। ये भिन्न-भिन्न तलों में स्थित होती हैं।

11.1.7 दो विषमतलीय रेखाओं के बीच का कोण उन दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच का कोण है, जो किसी बिंदु से (मूलबिंदु को प्राथमिकता देते हुए) इन विषमतलीय रेखाओं में से प्रत्येक के समांतर खींची जाती हैं।

11.1.8 यदि l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 दो रेखाओं की दिक्कोज्याएँ हैं तथा इन दोनों के बीच का न्यून कोण θ है, तो

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

11.1.9 यदि a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 दो रेखाओं के दिक्-अनुपात हैं तथा इन दोनों के बीच का न्यून कोण θ है, तो

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right|$$

11.1.10 एक रेखा, जो स्थिति सदिश $\vec{a}$ वाले एक बिंदु से होकर जाती है और एक दिए हुए सदिश $\vec{b}$ के समांतर है, की सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ होती है।

11.1.11 एक बिंदु (x_1, y_1, z_1) से होकर जाने वाली तथा दिक्कोज्याएँ l, m, n (या दिक्-अनुपात a, b, c) वाली रेखा की समीकरण होती है:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \text{ या } \left(\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}\right)$$

11.1.12 स्थिति सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ वाले दो बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा की सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ है।

11.1.13 दो बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) से होकर जाने वाली रेखा की कार्तीय समीकरण

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ होती है।}$$

11.1.14 यदि $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$ रेखाओं के बीच का न्यून कोण θ है, तो θ निम्नलिखित से प्राप्त किया जाता है:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{b}_1 . \vec{b}_2|}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|} \text{ या } \theta = \cos^{-1}\frac{|\vec{b}_1 . \vec{b}_2|}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}$$

11.1.15 यदि $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ और $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ दो रेखाओं की समीकरण हैं, तो इन रेखाओं के बीच का न्यून कोण θ निम्नलिखित से प्राप्त होता है:

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

11.1.16 दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी उस रेखाखंड की लंबाई होती है जो इन दोनों रेखाओं पर लंब हो।

11.1.17 रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$ के बीच की न्यूनतम दूरी निम्नलिखित होती है:

$$\left| \frac{\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \, . \, \vec{a}_2 - \vec{a}_1}{\left| \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \right|} \right| .$$

11.1.18 रेखा $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ और $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ के बीच की न्यूनतम दूरी है:

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}}$$

11.1.19 समांतर $\vec{r} \quad \vec{a}_1 \quad \vec{b}$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}$ रेखाओं के बीच की दूरी है:

$$\left| \frac{\vec{b} \quad \vec{a}_2 - \vec{a}_1}{\left| \vec{b} \right|} \right|$$

11.1.20 एक समतल की सदिश समीकरण, जो मूलबिंदु से दूरी p पर है तथा उस समतल पर अभिलंब मात्रक सदिश में है, $\vec{r} . \hat{n} = p$ होती है।

11.1.21 उस समतल की समीकरण, $lx + my + nz = p$ होती है। जिसकी मूलबिंदु से दूरी p है और जिसकेअभिलंब की दिक्कोज्याएँ l, m, n हैं।

11.1.22 उस समतल की समीकरण, जो उस बिंदु से होकर जाती है जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है और जो सदिश $\vec{n}$ पर लंब है, $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{n} = 0$ या $\vec{r} . \vec{n} = d$ होती है, जहाँ $d = \vec{a} . \vec{n}$ है।

11.1.23 उस समतल की समीकरण, जो दिक्-अनुपातों a, b, c वाली एक रेखा पर लंब है और एक दिए हुए बिंदु (x_1, y_1, z_1) से होकर जाता है, $a\,(x - x_1) + b\,(y - y_1) + c\,(z - z_1) = 0$ होती है।

11.1.24 तीन अंसरेखी बिंदुओं (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) और (x_3, y_3, z_3) से होकर जाने वाले समतल की समीकरण

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ होती है।}$$

11.1.25 स्थिति सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ वाले तीन असंरेखी बिंदुओं को अंतर्विष्ट करने वाले समतल की सदिश समीकरण $(\vec{r}-\vec{a}).\left[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\right]=0$ होती है।

11.1.26 निर्देशांक अक्षों को $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ और $(0, 0, c)$ पर काटने वाले समतल की समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ होती है।

11.1.27 समतलों $\vec{r}.\vec{n}_1=d_1$ और $\vec{r}.\vec{n}_2=d_2$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले किसी समतल की सदिश समीकरण $(\vec{r}.\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}.\vec{n}_2-d_2)=0$ होती है, जहाँ λ कोई शून्येतर अचर है।

11.1.28 दिए हुए दो समतलों $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ और $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले समतल की कार्तीय समीकरण $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda\ (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ जहाँ λ कोई शून्येतर अचर है।

11.1.29 दो रेखाएँ $\vec{r}$ $\vec{a}_1$ $\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$ सह-तलीय होती है, यदि

$(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\,.\,(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)=0$ हो।

11.1.30 दो रेखाएँ $\frac{x-x_1}{a_1}$ $\frac{y-y_1}{b_1}$ $\frac{z-z_1}{c_1}$ और $\frac{x-x_2}{a_2}$ $\frac{y-y_2}{b_2}$ $\frac{z-z_2}{c_2}$ समतलीय होती हैं, यदि

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ हो।}$$

11.1.31 सदिश रूप में, यदि दो समतलों $\vec{r}\,.\,\vec{n}_1 = d_1$ और $\vec{r}\,.\,\vec{n}_2 = d_2$, के बीच का न्यून कोण θ हो, तो $\theta=\cos^{-1}\frac{|\vec{n}_1\,.\,\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.\,|\vec{n}_2|}$ होता है।

11.1.32 रेखा $\vec{r}$ $\vec{a}$ $\vec{b}$ और समतल $\vec{r}\,.\,\vec{n} = d$ के बीच का न्यून कोण θ, $\sin\theta = \dfrac{|\vec{b}\,.\,\vec{n}|}{|\vec{b}|\,.\,|\vec{n}|}$ से

प्राप्त होता है।

11.2 हल किये हुए उदाहरण

संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

उदाहरण 1 यदि किसी रेखा केदिक्-अनुपात 1, 1, 2 हैं, तो उसकी दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल दिक्कोज्याएँ निम्नलिखित से प्राप्त होती हैं।

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

यहाँ a, b, c क्रमश: 1, 1, 2, हैं।

अत:, $l = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}},\ m = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}},\ n = \dfrac{2}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$

अर्थात्, $l = \dfrac{1}{\sqrt{6}},\ m = \dfrac{1}{\sqrt{6}},\ n = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$, अर्थात् $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$ दी हुई रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं।

उदाहरण 2 बिंदुओं P (2, 3, 5) और Q (–1, 2, 4) से होकर जाने वाली रेखा की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल बिंदु P (x_1, y_1, z_1) और Q (x_2, y_2, z_2) से होकर जाने वाली रेखा की दिक्कोज्याएँ

$\dfrac{x_2 - x_1}{PQ}, \dfrac{y_2 - y_1}{PQ}, \dfrac{z_2 - z_1}{PQ}$ होती हैं।

यहाँ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$= \sqrt{(-1-2)^2 + (2-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

अत: दिक्कोज्याएँ हैं।

$$\pm\left(\frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right) \text{ या } \pm\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

उदाहरण 3 यदि कोई रेखा x, y और z अक्षों की धनात्मक दिशाओं से क्रमशः $30°, 60°$ और $90°$ के कोण बनाती है, तो उसकी दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल उस रेखा की दिक्कोज्याएँ जो, अक्षों से α, β, γ कोण बनाती हैं, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ होती हैं।

अतः, उस रेखा की दिक्कोज्याएँ $\cos 30°, \cos 60°, \cos 90°$, अर्थात् $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ हैं।

उदाहरण 4 बिंदु Q (2, 2, 1) और R (5, 1, –2) को मिलाने वाली रेखा पर स्थित किसी बिंदु का x-निर्देशांक 4 है। इसका z-निर्देशांक ज्ञात कीजिए।.

हल मान लीजिए कि बिंदु P रेखाखंड QR को $\lambda : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। तब, P के निर्देशांक हैं।

$$\left(\frac{5\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{-2\lambda+1}{\lambda+1}\right)$$

परंतु P का x– निर्देशांक 4 है। अतः, $\frac{5\lambda+2}{\lambda+1} = 4 \Rightarrow \lambda = 2$

इसलिए, P का z– निर्देशांक $= \frac{-2\lambda+1}{\lambda+1} = -1$

उदाहरण 5 उस बिंदु की समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) = 9$ से दूरी ज्ञात कीजिए जिसकी स्थिति सदिश $(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ है।

हल यहाँ $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{n}$ $\hat{i} - 2\hat{j}$ $4\hat{k}$ है तथा $d = 9$ है।

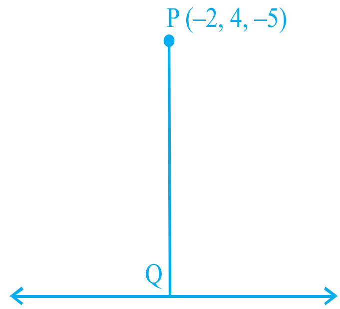
अतः, वाँछित दूरी $= \frac{\left|(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).(\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) - 9\right|}{\sqrt{1+4+16}}$

$$= \frac{|2-2-4-9|}{\sqrt{21}} = \frac{13}{\sqrt{21}}$$

उदाहरण 6 बिंदु (– 2, 4, – 5) की रेखा $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ दूरी ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ P (–2, 4, – 5) दिया हुआ बिंदु है। रेखा पर कोई भी बिंदु Q (3λ –3, 5λ + 4, (6λ –8) है।

अत:, $\overrightarrow{PQ}$ = $(3\lambda-1)\ \hat{i}+5\lambda\,\hat{j}+(6\lambda-3)\hat{k}$.



आकृति 11.1

क्योंकि $\overrightarrow{PQ} \perp \left(3\hat{i}+5\,\hat{j}+6\hat{k}\right)$ है, इसलिए हमें प्राप्त होता है।

$$3\,(3\lambda-1)+5(\,5\lambda)+6\,(6\lambda-3\,)=0$$

या $9\lambda + 25\lambda + 36\lambda = 21$, अर्थात् $\lambda = \frac{3}{10}$ है।

इस प्रकार, $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{10}\hat{i}+\frac{15}{10}\hat{j}-\frac{12}{10}\hat{k}$

अत: $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\frac{1}{10}\sqrt{1+225+144}=\sqrt{\frac{37}{10}}$

उदाहरण 7 उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ बिंदुओं (3, – 4, – 5) और (2, –3, 1) से होकर जाने वाली रेखा तीन बिंदुओं (2, 2, 1), (3, 0, 1) और (4, –1, 0) से होकर जाने वाले समतल को काटती है।

हल तीन बिंदुओं (2, 2, 1), (3, 0, 1) और (4, –1, 0) से होकर जाने वाले समतल की समीकरण है:

$$\left[(\vec{r}-(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\right].\left[(\hat{i}-2\hat{j})\times(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})\right]=0$$

अर्थात् $\vec{r}.(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=7$ या $2x+y+z-7=0$ ... (1)

बिंदुओं (3, – 4, – 5) और (2, – 3, 1) से होकर जाने वाली रेखा की समीकरण है:

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+5}{6} \qquad \ldots (2)$$

रेखा (2) पर स्थित कोई भी बिंदु $(-\lambda+3,\ \lambda-4,\ 6\lambda-5)$ है। यह बिंदु समतल (1) पर स्थित है। अत:, $2\,(-\lambda+3)+(\lambda-4)+(6\lambda-5)-7=0$, अर्थात् $\lambda = 2$ है।

अत: वाँछित बिंदु (1, – 2, 7) हैं।

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 8 रेखा $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$ और समतल $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ के प्रतिच्छेद बिंदु से बिंदु $(-1, -5, -10)$ की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल दिया है: $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$ और $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ इन दोनों समीकरणों को हल करने पर, $[(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})].(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ जिससे $\boldsymbol{\lambda} = 0$ प्राप्त होता है।

अत:, रेखा और समतल का प्रतिच्छेद बिंदु $(2, -1, 2)$ है। तथा अन्य गबिंदु $(-1, -5, -10)$ है। अत: इन बिंदुओं के बीच की दूरी $\sqrt{2\ \ (\ \ 1)^2\ \ [\ 1\ \ 5]^2\ \ [2\ \ (\ \ 10)]^2}$ अर्थात् 13 है।

उदाहरण 9 कोई समतल निर्देशांक अक्षों A, B, C पर इस प्रकार मिलता है कि बिंदु $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ ΔABC का केंद्रक है। दर्शाइए कि उस समतल की समीकरण $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=3$ है।

हल मान लीजिए कि समतल की समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ है।}$$

तब, A, B और C के निर्देशांक क्रमश: $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ और $(0, 0, c)$ है। त्रिभुज ΔABC का केंद्रक

$$\frac{x_1\quad x_2\quad x_3}{3}, \frac{y_1\quad y_2\quad y_3}{3}, \frac{z_1\quad z_2\quad z_3}{3} \text{ अर्थात् } \frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3} \text{ है।}$$

परंतु ΔABC के केंद्रक के निर्देशांक (α, β, γ) हैं। (दिया है)

अत: $$\alpha=\frac{a}{3}, \beta=\frac{b}{3} \text{ और } \gamma=\frac{c}{3} \text{ है, अर्थात् } a=3\alpha, b=3\beta \text{ और } c=3\gamma \text{ है।}$$

इस प्रकार, समतल की समीकरण

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=3 \text{ है।}$$

उदाहरण 10 उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक्कोज्याएँ $3l+m+5n=0$ और $6mn-2nl+5lm=0$ समीकरणों से प्राप्त होती हैं।

हल दोनों समीकरणों से m का विलोपन करने पर,

$\Rightarrow \quad 2n^2 + 3\,ln + l^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (n + l)\,(2n + l) = 0$

$\Rightarrow$ या तो $n = -\,l$ या $l = -\,2n$

अब, यदि $l = -\,n,$ तो $m = -\,2n$ है;

तथा यदि $l = -\,2n,$ तो $m = n$ है।

अतः दोनों रेखाओं के दिक्-अनुपात $-\,n, -2n, n$ और $-2n, n, n,$ के समानुपाती हैं, अर्थात्

$1, 2, -1$ और $-2, 1, 1.$

अत; इन रेखाओं के समांतर सदिशों की समीकरण क्रमशः हैं:

$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$,

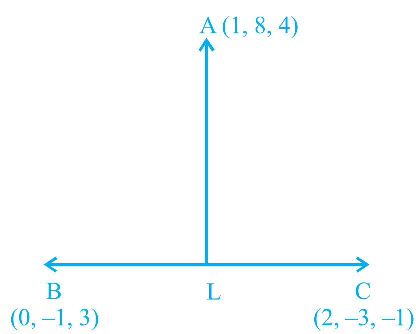
यदि इन रेखाओं के बीच का कोण θ है, तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$= \frac{\left(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}\right)\cdot\left(-2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\,\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = -\frac{1}{6}$$

अतः, $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{6}\right)$ है।

उदाहरण 11 बिंदु A (1, 8, 4) से बिंदुओं B (0, –1, 3) और C (2, –3, –1) को मिलाने वाली रेखा पर डाले गए लंब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.2

हल मान लीजिए कि L बिंदु A (1, 8, 4) से B और C बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा पर डाले गए लम्ब का पाद है, जैसा कि आकृति 11.2 में दर्शाया गया है। सूत्र $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$, का प्रयोग करने पर, रेखा BC की

समीकरण $\vec{r} = \left(-\hat{j}+3\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k}\right)$ है।

$$\Rightarrow \qquad x\hat{i} \quad y\hat{i} \quad z\hat{k} \ = 2\lambda\hat{i}-(2\lambda+1)\hat{j}+(3-4\lambda)\hat{k}$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$x = 2\lambda, y = -(2\lambda + 1), z = 3 - 4\lambda \qquad (1)$$

इस प्रकार, L के निर्देशांक $(2\lambda, -(2\lambda + 1), (3 - 4\lambda)$, हैं, जिससे रेखा AL के दिक्-अनुपात

$(1 - 2\lambda), 8 + (2\lambda + 1), 4 - (3 - 4\lambda)$, हैं, अर्थात् $1 - 2\lambda, 2\lambda + 9, 1 + 4\lambda$ हैं।

क्योंकि AL, BC पर लंब है, इसलिए हमें प्राप्त होता है:

$$(1 - 2\lambda)(2 - 0) + (2\lambda + 9)(-3 + 1) + (4\lambda + 1)(-1 -3) = 0$$

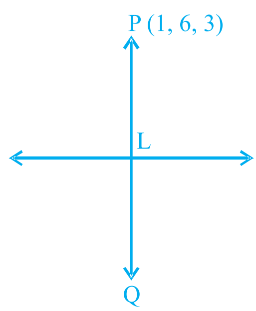
$$\Rightarrow \qquad \lambda = \frac{-5}{6}$$

अभीष्ट बिंदु, समीकरण (1) में λ का मान प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है, जो $\left(\frac{-5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$ है।

उदाहरण 12 रेखा $\frac{x}{1} \quad \frac{y-1}{2} \quad \frac{z-2}{3}$ के सापेक्ष बिंदु P (1, 6, 3) का प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि P (1, 6, 3) दिया हुआ बिंदु है तथा मान लीजिए कि P से दी हुई रेखा पर डाले गए लंब का पाद L है। दी हुई रेखा पर स्थित व्यापक बिंदु के निर्देशांक $\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}=\lambda$

अर्थात् $x = \lambda, y = 2\lambda + 1$ और $z = 3\lambda + 2$ है। यदि L के निर्देशांक $(\lambda, 2\lambda + 1, 3\lambda + 2)$ हैं, तो PL के दिक्-अनुपात $\lambda - 1, 2\lambda - 5, 3\lambda - 1$ हैं। परंतु दी हुई रेखा के दिक्-अनुपात, जो PL पर लंब है, 1, 2, 3 है। अत:, $(\lambda - 1)\, 1 + (2\lambda - 5)\, 2 + (3\lambda - 1)\, 3 = 0$ जिससे $\lambda = 1$ प्राप्त होता है। अत: L के निर्देशांक (1, 3, 5) हैं। मान लीजिए कि दी हुई रेखा में P (1, 6, 3) का प्रतिबिंब Q (x_1, y_1, z_1) है। तब L रेखाखंड PQ का मध्य बिंदु है।



आकृति 11.3

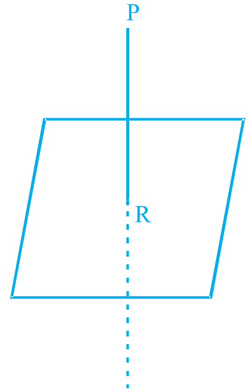
अत:, $\frac{x_1+1}{2}=1, \frac{y_1+6}{2}=3$ तथा $\frac{z_1+3}{2}=5$

$\Rightarrow \qquad x_1 = 1,\ \ y_1 = 0,\ \ z_1 = 7$

अत:, दी हुई रेखा में (1, 6, 3) का प्रतिबिंब (1, 0, 7) है।

उदाहरण 13 समतल $\hat{r}\quad 2\hat{i}-\hat{j}\quad \hat{k}\quad 3\quad 0$ में उस बिंदु का प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए जिसका स्थिति सदिश $\hat{i}\quad 3\hat{j}\quad 4\hat{k}$ है।

हल मान लीजिए कि दिया हुआ बिंदु P $\left(\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)$ है तथा समतल $\hat{r}\ .\ \left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$ में Q बिंदु P का प्रतिबिंब है, जैसा कि आकृति 11.4. में दर्शाया गया है।



आकृति 11.4

तब, PQ इस समतल का अभिलंब होगा। क्योंकि PQ, P से होकर जाती है तथा समतल पर लंब है, इसलिए PQ की समीकरण निम्नलिखित होगी–

$$\vec{r} = \hat{i}\quad 3\hat{j}\quad 4\hat{k}\qquad 2\hat{i}-\hat{j}\quad \hat{k}$$

क्योंकि बिंदु Q रेखा PQ पर स्थित है, इसलिए Q के स्थिति सदिश को निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$\hat{i}\quad 3\hat{j}\quad 4\hat{k}\qquad 2\hat{i}-\hat{j}\quad \hat{k}\ ,$$

अर्थात् $\quad (1+2\lambda)\hat{i}+(3-\lambda)\hat{j}+(4+\lambda)\hat{k}$

क्योंकि R रेखाखंड PQ का मध्य-बिंदु है, इसलिए R का स्थिति सदिश है:

$$\frac{\left[(1+2\lambda)\hat{i}+(3-\lambda)\hat{j}+(4+\lambda)\hat{k}\right]+\left[\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right]}{2}$$

अर्थात् $\quad (\lambda+1)\hat{i}+\left(3-\dfrac{\lambda}{2}\right)\hat{j}+\left(4+\dfrac{\lambda}{2}\right)\hat{k}$

पुन:, क्योंकि R समतल $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+3=0$ पर स्थित है, इसलिए

$$\left\{(\lambda+1)\hat{i}+\left(3-\frac{\lambda}{2}\right)\hat{j}+\left(4+\frac{\lambda}{2}\right)\hat{k}\right\}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})+3=0$$

$\Rightarrow \qquad \lambda = -2$

अतः, Q का स्थिति सदिश $\left(\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)-2\quad 2\hat{i}-\hat{j}\quad \hat{k}$ अर्थात् $-3\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$ है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 14 से 19 तक प्रत्येक में, दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

उदाहरण 14 बिंदु (2, 5, 7) से x- अक्ष पर डाले गए लंबपाद के निर्देशांक हैं।

(A) (2, 0, 0) (B) (0, 5, 0) (C) (0, 0, 7) (D) (0, 5, 7)

हल (A) सही उत्तर है।

उदाहरण 15 बिंदु (3, 2, –1) और (6, 2, –2) को मिलाने वाले रेखांखड पर स्थित कोई बिंदु P है। यदि P का x-निर्देशांक 5 है, तो उसका y निर्देशांक है

(A) 2 (B) 1 (C) –1 (D) –2

हल (A) सही उत्तर है। मान लीजिए कि P रेखाखंड को $\lambda : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। तब, P के x निर्देशांक को $x = \frac{6\lambda+3}{\lambda+1}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जिससे $\frac{6\lambda+3}{\lambda+1}=5$ प्राप्त होता है। इस कारण $\lambda = 2$ है। इस प्रकार, P का y निर्देशांक $\frac{2\lambda+2}{\lambda+1}=2$ है।

उदाहरण 16 यदि एक रेखा x, y, z अक्षों की धनात्मक दिशाओं से क्रमशः α, β, γ कोण बनाती है तो इस रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं:

(A) $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ (B) $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

(C) $\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma$ (D) $\cos^2\alpha, \cos^2\beta, \cos^2\gamma$

हल (B) सही उत्तर है।

उदाहरण 17 x-अक्ष से बिंदु P (a, b, c) की दूरी है

(A) $\sqrt{a^2\quad c^2}$ (B) $\sqrt{a^2\quad b^2}$ (C) $\sqrt{b^2\quad c^2}$ (D) $b^2 + c^2$

हल (C) सही उत्तर है। बिंदु P (a, b, c) की बिंदु Q $(a, 0, 0)$ से $\sqrt{b^2\quad c^2}$ है।

उदाहरण 18 आकाश (स्पेस) में x-अक्ष की समीकरण हैं

(A) $x = 0, y = 0$ (B) $x = 0, z = 0$ (C) $x = 0$ (D) $y = 0, z = 0$

हल (D) सही उत्तर है। x–अक्ष पर y निर्देशांक और z निर्देशांक शून्य होते हैं।

उदाहरण 19 कोई रेखा निर्देशांक अक्षों से बराबर कोण बनाती है। इस रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं

(A) $\pm (1, 1, 1)$ (B) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (C) $\pm\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (D) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

हल (B) सही उत्तर है। मान लीजिए कि रेखा प्रत्येक अक्ष से α कोण बनाती है। तब इसकी दिक्कोज्याएँ $\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha$ होंगी। क्योंकि $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ है, इसलिए $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ होगा।

उदाहरण 20 से 22 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए–

उदाहरण 20 यदि एक रेखा x, y और z अक्षों से क्रमशः $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ और $\frac{}{4}$ कोण बनाती हैं, तो इसकी दिक्कोज्याएँ ________ होंगी।

हल दिक्कोज्याएँ $\cos\frac{}{2}, \cos\frac{3\pi}{4}, \cos\frac{}{4}$ अर्थात् $\pm\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ हैं।

उदाहरण 21 यदि कोई रेखा निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ कोण α, β, γ बनाती है, तो $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ का मान ________ है।

हल
$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma &= (1 - \cos^2\alpha) + (1 - \cos^2\beta) + (1 - \cos^2\gamma)\\ &= 3 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 2\end{aligned}$$

उदाहरण 22 यदि एक रेखा y और z अक्षों में से प्रत्येक से $\frac{}{4}$ कोण बनाती है, तो रेखा द्वारा x–अक्ष के साथ बनाया गया कोण __________ है।

हल मान लीजिए यह x–अक्ष से कोण α बनाती है। तब, $\cos^2\alpha + \cos^2\frac{}{4} + \cos^2\frac{}{4} = 1$ जिसे सरल करने पर $\alpha = \frac{}{2}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 23 और 24 में बताइए कि कथन सत्य हैं या असत्य–

उदाहरण 23 बिंदु (1, 2, 3), (–2, 3, 4) और (7, 0, 1) संरेखी है।

हल मान लीजिए कि A, B, C क्रमश: बिंदु (1, 2, 3), (–2, 3, 4) और (7, 0, 1) हैं। तब, AB और BC रेखाओं में से प्रत्येक के दिक्अनुपात – 3, 1, 1 के समानुपाती हैं। अत: कथन सत्य है।

उदाहरण 24 बिंदु (3,5,4) और (5,8,11) से होकर जाने वाली रेखा की सदिश समीकरण

$$\vec{r} \quad 3\hat{i} \quad 5\hat{j} \quad 4\hat{k} \qquad (2\hat{i} \quad 3\hat{j} \quad 7\hat{k}) \text{ है।}$$

हल बिंदुओं (3,5,4) और (5,8,11) के स्थिति सदिश $\vec{a} \quad 3\hat{i} \quad 5\hat{j} \quad 4\hat{k}, \vec{b} \quad 5\hat{i} \quad 8\hat{j} \quad 11\hat{k}$ हैं। अत: रेखा की वाँछित समीकरण है: $\vec{r} \quad 3\hat{i} \quad 5\hat{j} \quad 4\hat{k} \qquad (2\hat{i} \quad 3\hat{j} \quad 7\hat{k})$

अत:, कथन सत्य है।

11.3 प्रश्नावली

लघुउत्तरीय (S.A.)

1. आकाश (स्पेस) में ऐसे बिंदु A के स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए कि $\overrightarrow{OA}$, OX से 60^o झुका हुआ हो और OY से 45° पर झुका हुआ हो तथा $|\overrightarrow{OA}| = 10$ इकाई है।

2. उस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 6\hat{k}$ के समांतर है तथा बिंदु (1,–2,3) से होकर जाती है।

3. दर्शाइए कि रेखाएँ $\frac{x \quad 1}{2} \quad \frac{y \quad 2}{3} \quad \frac{z \quad 3}{4}$ और $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z$ प्रतिच्छेद करती हैं। साथ ही, इनका प्रतिच्छेद बिंदु भी ज्ञात कीजिए।

4. रेखा $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = (2\hat{j} - 5\hat{k}) + \mu(6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

5. सिद्ध कीजिए कि A (0, –1, –1) और B (4, 5, 1) बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा C (3, 9, 4) और D (– 4, 4, 4) बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा को प्रतिच्छेद करती है।

6. सिद्ध कीजिए कि $x = py + q, z = ry + s$ तथा $x = p'y + q', z = r'y + s'$ रेखाएँ परस्पर लंब हैं, यदि $pp' + rr' + 1 = 0$.

7. उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो A (2, 3, 4) और B (4, 5, 8) बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को समकोण पर समद्विभाजित करता है।

8. उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूलबिंदु से $3\sqrt{3}$ इकाई की दूरी पर है तथा जिसका अभिलंब निर्देशांक अक्षों से समान झुकाव पर है।

9. यदि किसी बिंदु (–2, – 1, – 3) से होकर खींची गई रेखा किसी समतल को समकोण पर बिंदु (1, – 3, 3) पर मिलती है, तो उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए।

10. बिंदुओं (2, 1, 0), (3, –2, –2) और (3, 1, 7) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

11. मूलबिंदु से होकर जाने वाली उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनमें से प्रत्येक रेखा $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$ को $\frac{\pi}{3}$ के कोण पर प्रतिच्छेद करती है।

12. उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक्कोज्याएँ $l + m + n = 0$ तथा $l^2 + m^2 - n^2 = 0$ समीकरणों से प्राप्त होती हैं।

13. यदि किसी चर रेखा की दो आसन्न स्थितियों में दिक्कोज्याएँ l, m, n और $l + \delta l, m + \delta m, n + \delta n$ हैं तो दर्शाइए कि इन दो स्थितियों के बीच में छोटा कोण $\delta\theta$ निम्नलिखित से प्राप्त होगा।

$$\delta\theta^2 = \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2$$

14. O मूल बिंदु है तथा (a, b, c) बिंदु A को प्रदर्शित करते हैं। रेखा OA की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए तथा A से होकर जाने वाले और OA से समकोण पर रहने वाले समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए।

15. समकोणिक अक्षों की दो पद्धतियों का एक ही मूल बिंदु है। यदि कोई तल इनको मूल बिंदु से क्रमशः a, b, c और a', b', c' पर काटता है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

16. बिंदु (2,3,–8) से रेखा $\frac{4 \quad x}{2} \quad \frac{y}{6} \quad \frac{1 \quad z}{3}$ पर डाले गए लंब का पाद ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस बिंदु से रेखा की लांबिक दूरी भी ज्ञात कीजिए।

17. बिंदु (2,4,–1) की रेखा $\frac{x \quad 5}{1} \quad \frac{y \quad 3}{4} \quad \frac{z \quad 6}{-9}$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

18. बिंदु $\left(1,\frac{3}{2},2\right)$ से समतल $2x-2y+4z+5=0$ पर डाले गए लंब की लंबाई और उसका लंब पाद ज्ञात कीजिए।

19. बिंदु $(3,0,1)$ से होकर जाने वाली उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो $x+2y=0$ और $3y-z=0$ समतलों के समांतर हैं।

20. उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो $(2,1,-1)$ और $(-1,3,4)$ बिंदुओं से होकर जाता है तथा समतल $x-2y+4z=10$ पर लंब है।

21. रेखाओं $\vec{r}=(8+3\lambda)\hat{i}-(9+16\lambda)\hat{j}+(10+7\lambda)\hat{k}$ और $\vec{r}=15\hat{i}+29\hat{j}+5\hat{k}+\mu(3\hat{i}+8\hat{j}-5\hat{k})$ बीच की लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

22. उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $5x+3y+6z+8=0$ पर लंब है तथा जिसमें $x+2y+3z-4=0$ और $2x+y-z+5=0$ समतलों की प्रतिच्छेदन रेखा अंतर्विष्ट है।

23. समतल $ax+by=0$ को इसकी समतल $z=0$ के साथ प्रतिच्छेदन रेखा के परित: कोण α पर घुमाया जाता हैं। सिद्ध कीजिए कि उस समतल का अपनी नई स्थिति में समीकरण

$ax+by\ \pm(\sqrt{a^2+b^2}\tan\alpha)z=0$ है।

24. समतल $\vec{r}\cdot(\hat{i}+3\hat{j})-6=0$ और $\vec{r}\cdot(3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k})=0$ केप्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी मूल बिंदु से लांबिक दूरी इकाई है।

25. दर्शाइए कि बिंदु $(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})$ और $3(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ समतल $\vec{r}\cdot(5\hat{i}+2\hat{j}-7\hat{k})+9=0$ से समदूरस्थ है तथा इसके विपरीत ओर स्थित हैं।

26. $\overrightarrow{AB}=3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और $\overrightarrow{CD}=-3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$ दो सदिश हैं। बिंदु A और C के स्थिति सदिश क्रमशः $6\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k}$ और $-9\hat{j}+2\hat{k}$ हैं, रेखा AB पर स्थित बिंदु P और रेखा CD पर स्थित बिंदु Q के स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए ताकि $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$ दोनों पर लंब हो।

27. दर्शाइए कि वे सरल रेखाएँ जिनकी दिक्कोज्याएँ समीकरणों $2l+2m-n=0$ और $mn+nl+lm=0$ से प्राप्त होती है परस्पर समकोण हैं।

28. यदि $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$ तीन परस्पर लंब रेखाओं की दिक्कोज्याएँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि वह रेखा, जिसकी दिक्कोज्याएँ $l_1 + l_2 + l_3, m_1 + m_2 + m_3, n_1 + n_2 + n_3$ के समानुपाती हैं, उपरोक्त रेखाओं से बराबर कोण बनाती हैं।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 29 से 36 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

29. बिंदु (α,β,γ) की y–अक्ष से दूरी है

(A) β (B) $|\beta|$ (C) $|\beta|+|\gamma|$ (D) $\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}$

30. यदि एक रेखा की दिक्कोज्याएँ k, k, k हैं, तो

(A) $k>0$ (B) $0<k<1$ (C) $k=1$ (D) $k\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}$ या $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

31. मूल बिंदु से समतल $\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}-\frac{6}{7}\hat{k}\right)=1$ की दूरी है

(A) 1 (B) 7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) इनमें से कोई नहीं

32. सरल रेखा $\frac{x\ \ 2}{3}\ \ \frac{y\ \ 3}{4}\ \ \frac{z\ \ 4}{5}$ और समतल $2x - 2y + z = 5$ के बीच के कोण की sine है

(A) $\frac{10}{6\sqrt{5}}$ (B) $\frac{4}{5\sqrt{2}}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

33. xy–समतल में बिदु (α,β,γ) का परावर्तन है

(A) $(\alpha,\beta,0)$ (B) $(0,0,\gamma)$ (C) $(-\alpha,-\beta,\gamma)$ (D) $(\alpha,\beta,-\gamma)$

34. चतुर्भुज ABCD, जहाँ A(0,4,1), B (2, 3, –1), C(4, 5, 0) और D (2, 6, 2) है, का क्षेत्रफल बराबर है।

(A) 9 वर्ग इकाई (B) 18 वर्ग इकाई (C) 27 वर्ग इकाई (D) 81 वर्ग इकाई

35. $xy + yz = 0$ द्वारा निरूपित बिंदुपथ है

(A) लंब रेखाओं का एक युग्म (B) समांतर रेखाओं का एक युग्म

(C) समांतर समतलों का एक युग्म (D) लंब समतलों का एक युग्म

36. समतल $2x - 3y + 6z - 11 = 0$, x– अक्ष के साथ $\sin^{-1}(\alpha)$ का कोण बनाता है। α का मान है।

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

प्रश्न 37 से 41 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए–

37. एक समतल (2,0,0) (0,3,0) और (0,0,4) बिंदुओं से होकर जाता है। इस समतल की समीकरण__________है।

38. सदिश $(2\hat{i}\quad 2\hat{j}-\hat{k})$ की दिक्कोज्याएँ__________हैं।

39. रेखा $\dfrac{x-5}{3}\quad\dfrac{y\quad 4}{7}\quad\dfrac{z-6}{2}$ की सदिश समीकरण __________है।

40. बिंदु (3,4,–7) और (1,–1,6) से होकर जाने वाली रेखा की सदिश समीकरण__________है।

41. समतल $\overset{r}{r}.(\hat{i}\quad\hat{j}-\hat{k})\quad 2$ का कार्तीय समीकरण __________है।

प्रश्न 42 से 49 तक प्रत्येक में सत्य या असत्य कथन बताइए–

42. समतल $x+2y+3z-6=0$ पर अभिलंब एकक (या मात्रक) सदिश $\dfrac{1}{\sqrt{14}}\hat{i}\quad\dfrac{2}{\sqrt{14}}\hat{j}\quad\dfrac{3}{\sqrt{14}}\hat{k}$ है।

43. समतल $2x-3y+5z+4=0$ द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अंत:खंड $-2,\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{5}$ है।

44. रेखा $\vec{r}\quad(5\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k})\quad(2\hat{i}-\hat{j}\quad\hat{k})$ और समतल $\vec{r}.(3\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k})\quad 5\quad 0$ के बीच का कोण $\sin^{-1}\quad\dfrac{5}{2\sqrt{91}}$ है।

45. समतल $\vec{r}.(2\hat{i}-3\hat{j}\quad\hat{k})\quad 1$ और $\bar{r}.(\hat{i}-\hat{j})\quad 4$ के बीच का कोण $\cos^{-1}\quad\dfrac{-5}{\sqrt{58}}$ है।

46. रेखा $\vec{r}\quad 2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}\quad(\hat{i}-\hat{j}\quad 2\hat{k})$ समतल $\vec{r}.(3\hat{i}\quad\hat{j}-\hat{k})\quad 2\quad 0$ में स्थित है।

47. रेखा $\dfrac{x-5}{3}\quad\dfrac{y\quad 4}{7}\quad\dfrac{z-6}{2}$ सदिश समीकरण $\vec{r}\quad 5\hat{i}-4\hat{j}\quad 6\hat{k}\quad(3\hat{i}\quad 7\hat{j}\quad 2\hat{k})$ है।

48. बिंदु (5,–2,4), से होकर जाने वाली और $2\hat{i}\quad\hat{j}\quad 3\hat{k}$ के समांतर रेखा की समीकरण $\dfrac{x-5}{2}\quad\dfrac{y\quad 2}{-1}\quad\dfrac{z-4}{3}$ है।

49. यदि मूल बिंदु से किसी समतल पर खींचे गए लंब का पाद $(5,-3,-2)$, है, तो उस समतल की समीकरण $\vec{r}.(5\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})=38$ है।

अध्याय 12

रैखिक प्रोग्रामन

12.1 समग्र अवलोकन (Overview)

12.1.1 *एक इष्टतमीकरण समस्या*

ऐसी समस्या जिसमें किसी फलन का अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण करना हो, एक इष्टतमीकरण समस्या कहलाती है। एक इष्टतमीकरण समस्या लाभ, उत्पादन आदि को अधिकतमीकरण या उपलब्ध साधनों से मूल्य आदि के न्यूनतमीकरण से सबंधित होती है।

12.1.2 *रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ (LPP)*

एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या दो चरों (मान लीजिए x तथा y) वाले किसी रैखिक फलन जो उद्देश्य फलन कहलाता है, के इष्टतमीकरण (अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण) से सबंधित होती है, इस प्रतिबंध के साथ कि चर ऋणेतर हों तथा वे किसी रैखिक असमिकाओं के समुच्चय (जो रैखिक व्यवरोध कहलाते हैं) को संतुष्ट करें।

रैखिक प्रोग्रामन समस्या एक विशेष प्रकार की इष्टतमीकरण समस्या होती है।

12.1.3 ***उद्देश्य फलन*** रैखिक फलन $Z = ax + by$, जहाँ a तथा b अचर हैं, जिसका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण करना होता है, एक रैखिक उद्देश्य फलन कहलाता हैं।

12.1.4 ***निर्णय चर*** उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ में x तथा y निर्णय चर कहलाते हैं।

12.1.5 ***व्यवरोध*** किसी LPP के चरों पर रैखिक असमिकाओं या प्रतिबंधों को व्यवरोध कहते हैं। प्रतिबंध $x \geq 0, y \geq 0$ ऋणेतर व्यवरोध कहलाते हैं।

12.1.6 ***सुसंगत क्षेत्र*** ऋणेतर व्यवरोध $x \geq 0, y \geq 0$ सहित किसी LPP के सभी व्यवरोधों द्वारा निर्धारित उभयनिष्ठ क्षेत्र, समस्या का सुसंगत क्षेत्र कहलाता है।

12.1.7 ***सुसंगत हल*** किसी LPP के सुसंगत क्षेत्र के सभी अंत: बिंदु, सुसंगत हल को निरूपित करते हैं।

12.1.8 ***असुसंगत हल*** सुसंगत क्षेत्र के बाहर का कोई भी बिंदु असुसंगत हल कहलाता है।

12.1.9 ***इष्टतम (सुसंगत) हल*** सुसंगत क्षेत्र में कोई भी बिंदु जो उद्देश्य फलन का इष्टतम (अधिकतम या न्यूनतम) मान देता हो एक इष्टतम हल कहलाता है।

निम्नलिखित प्रमेय LPPs को हल करने के लिए आधारभूत हैं।

12.1.10 ***प्रमेय 1*** मान लीजिए कि किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र (उत्तल बहुभुज) R है तथा मान लीजिए कि $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। जब Z का इष्टतम (अधिकतम या न्यूनतम) मान होता है, जहाँ चर x तथा y रैखिक असमिकाओं द्वारा वर्णित या अवरोधों के आधीन हैं, तब यह इष्टतम मान अनिवार्यत: सुसंगत क्षेत्र के कोने के बिंदु (शीर्ष) पर घटित होना चाहिए।

प्रमेय 2 मान लीजिए कि किसी LPP का सुसगंत क्षेत्र R है तथा $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। यदि R एक परिबद्ध क्षेत्र है तो उद्देश्य फलन Z के R में अधिकतम तथा न्यूनतम दोनों ही मान होते हैं और इनमें से प्रत्येक R के किसी कोनीय बिंदु पर पाया जाता है।

यदि R एक अपरिबद्ध क्षेत्र है, तो उद्देश्य फलन के एक अधिकतम या न्यूनतम मान का अस्तित्व हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है। किंतु, यदि उसका अस्तित्व है, तो वह R के किसी कोनीय बिंदु पर ही होना चाहिए।

12.1.11 *LPP को हल करने की कोनीय बिंदु विधि*

इस विधि के निम्नलिखित चरण हैं:

(1) LPP का सुसंगत क्षेत्र ज्ञात कीजिए और उसके कोनीय बिंदुओं (शीर्षों) का निर्धारण या तो निरीक्षण द्वारा अथवा उस बिंदु पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं के समीकरणों के हल द्वारा कीजिए।

(2) उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का मान प्रत्येक कोनीय बिंदु पर ज्ञात कीजिए। मान लीजिए कि M तथा m, क्रमशः, Z के अधिकतम तथा न्यूनतम मान प्रकट करते हैं।

(3) (i) जब सुसगत क्षेत्र परिबद्ध होता है, तो M तथा m, क्रमशः, Z के अधिकतम तथा न्यूनतम मान होते हैं।

(ii) सुसंगत क्षेत्र के अपरिबद्ध होने की स्थिति में:

(a) M, Z का अधिकतम मान होता है, यदि $ax + by > M$ द्वारा निर्धारित खुले अर्ध-तल का सुसंगत क्षेत्र के साथ कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ न हो। अन्यथा Z का कोई भी अधिकतम मान नहीं होता।

(b) इसी प्रकार, m Z का न्यूनतम मान होता है, यदि $ax + by < m$ द्वारा निर्धारित खुले अर्ध-तल का सुसंगत क्षेत्र के साथ कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है। अन्यथा Z का कोई भी न्यूनतम मान नहीं होता।

12.1.12 ***बहु इष्टतम बिंदु*** यदि सुसंगत क्षेत्र के दो कोनीय बिंदुओं पर एक ही प्रकार के इष्टतम हल हैं, अर्थात्, दोनों ही बिंदुओं पर समान अधिकतम या न्यूनतम मान प्राप्त होते हैं, तो इन दोनों बिंदुओं को मिलाने वाले रेखा-खंड के किसी भी बिंदु पर समान प्रकार का इष्टतम हल होता है।

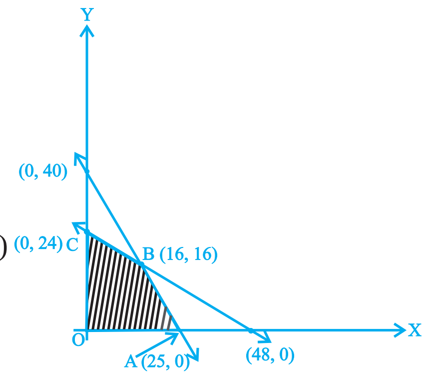
12.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय

उदाहरण 1 $Z = 4x + 3y$ का अधिकतम मान निर्धारित कीजिए, यदि LPP का सुसंगत क्षेत्र आकृति 12.1 में प्रदर्शित है।

हल सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध है। इसलिए Z का अधिकतम मान सुसंगत क्षेत्र के किसी कोनीय बिंदु पर होगा। आकृति 12.1.

कोनीय बिंदु	Z का मान	
O, (0, 0)	4 (0) + 3 (0) = 0	
A (25, 0)	4 (25) + 3 (0) = 100	
B (16, 16)	4 (16) + 3 (16) = **112**	← (अधिकतम)
C (0, 24)	4 (0) + 3 (24) = 72	



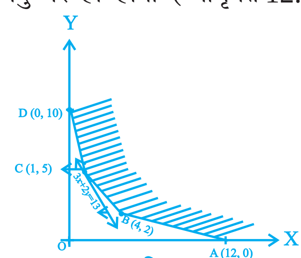
आकृति 12.1

अतः Z का अधिकतम मान 112 है।

उदाहरण 2 $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतम मान (यदि कोई है) निर्धारित कीजिए, यदि LPP का सुसंगत क्षेत्र आकृति 12.2 में प्रदर्शित किया गया है।

हल सुसंगत क्षेत्र (R) अपरिबद्ध है। अतः Z के न्यूनतम मान का अस्तित्व हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है। यदि उसका अस्तित्व है, तो वह किसी कोनीय बिंदु पर ही होगा (आकृति 12.2)

कोनीय बिंदु	Z का मान	
A, (12, 0)	3 (12) + 2 (0) = 36	
B (4, 2)	3 (4) + 2 (2) = 16	
C (1, 5)	3 (1) + 2 (5) = **13**	← (न्यूनतम)
D (0, 10)	3 (0) + 2 (10) = 20	



आकृति 12.2

हम $3x + 2y < 13$ का आरेख खींचते हैं। हम देखते हैं कि $3x + 2y < 13$ द्वारा निर्धारित खुले अर्ध-तल तथा R में कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है। अतः लघुत्तम मान 13, Z का न्यूनतम मान है।

उदाहरण 3 निम्नलिखित LPP को आरेखीय विधि से हल कीजिए:

$Z = 2x + 3y$ का, व्यवरोधों $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ के अंतर्गत, अधिकतमीकरण कीजिए।

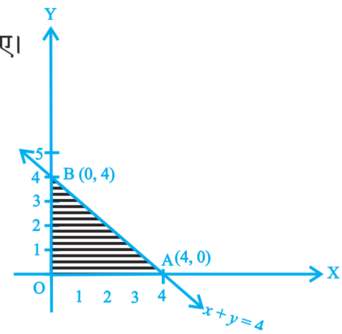
हल आकृति 12.3 में व्यवरोधों के निकाय $x \geq 0, y \geq 0$ तथा $x + y \leq 4$ द्वारा निर्धारित छायांकित क्षेत्र (OAB) सुसंगत क्षेत्र है।

सुसंगत क्षेत्र OAB परिबद्ध है, अतः अधिकतम मान सुसंगत क्षेत्र के किसी कोनीय बिंदु पर होगा। O(0, 0), A (4, 0) तथा B (0, 4) कोनीय बिंदु हैं।

इन कोनीय बिंदुओं में से प्रत्येक पर Z का मान ज्ञात कीजिए।

कोनीय बिंदु	**Z का मान**
0, (0, 0)	2 (0) + 3 (0) = 0
A (4, 0)	2 (4) + 3 (0) = 8
B (0, 4)	2 (0) + 3 (4) = **12**

← आकृति 12.3



आकृति 12.3

अतः Z का अधिकतम मान 12 है, जो बिंदु (0, 4) पर है।

उदाहरण 4 एक निर्माण कंपनी दो प्रकार के टेलीविज़न सेट बनाती है। एक काला-सफेद तथा दूसरा रंगीन। कंपनी के पास प्रति सप्ताह अधिकतम 300 सेट तैयार करने के साधन हैं। एक काला-सफेद सेट बनाने में 1800 रु तथा एक रंगीन सेट बनाने में 2700 रु लगते हैं। कंपनी टेलीविज़न सेट बनाने में प्रति सप्ताह 648000 रु से अधिक खर्च नहीं कर सकती है। यदि कंपनी प्रत्येक काले-सफेद सेट पर 510 रु तथा प्रत्येक रंगीन सेट पर 675 रु का लाभ अर्जित करती है। तो प्रत्येक प्रकार के कितने सेट निर्मित किए जाने चाहिए, जिससे उसे अधिकतम लाभ हो इस समस्या का एक LPP के रूप में सूत्रण कीजिए, दिया हुआ है कि उद्देश्य लाभ का अधिकतमीकरण करना है।

हल मान लीजिए कि x तथा y , क्रमशः प्रति सप्ताह बनने वाले काले-सफ़ेद सेटों तथा रंगीन सेटों की संख्या निरूपित करते हैं। अतः

$$x \geq 0, y \geq 0$$

क्योंकि कंपनी प्रति सप्ताह अधिकतम 300 सेट बना सकती है, इसलिए

$$x + y \leq 300$$

सेटों के निर्माण करने में साप्ताहिक मूल्य (रु में) $1800x + 2700y$ है तथा कंपनी 648000 रु तक खर्च कर सकती है। इसलिए,

$$1800x + 2700y \leq 648000, \text{ अर्थात्, } 2x + 3y \leq 720$$

x काले-सफेद सेटों तथा y रंगीन सेटों पर कुल लाभ $(510x + 675y)$ रु होता है। मान लीजिए कि $Z = 510x + 675y$ यही उद्देश्य फलन है।

अतः समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्नलिखित है:

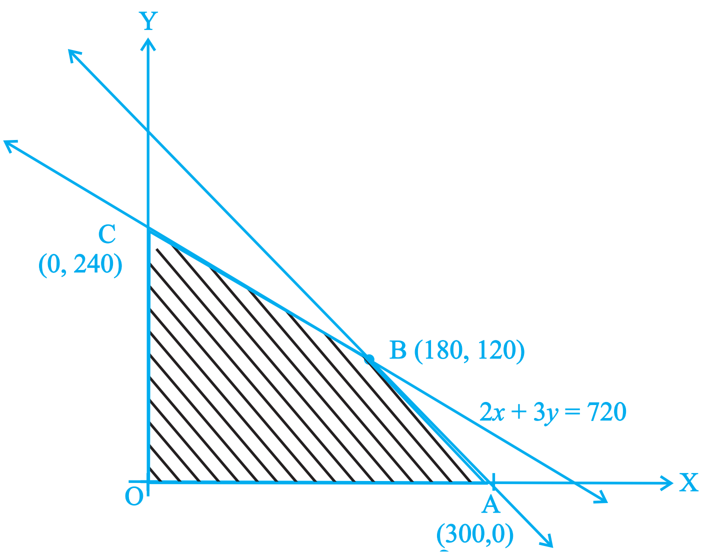
$Z = 510x + 675y$ का निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत अधिकतमीकरण कीजिए

$$x \quad y \quad 300$$
$$2x \quad 3y \quad 720$$
$$x \quad 0, y \quad 0$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 5 उदाहरण 4 पर ध्यान दीजिए। LPP को हल कीजिए।

हल समस्या नीचे दी हुई है।



आकृति 12.4

$Z = 510x + 675y$ का निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत अधिकतमीकरण कीजिए।

$$x \quad y \quad 300$$
$$2x \quad 3y \quad 720$$
$$x \quad 0, y \quad 0$$

सुसंगत क्षेत्र OABC आकृति 12.4 में प्रदर्शित है।

क्योंकि सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध है, इसलिए Z का अधिकतम मान OBC के किसी कोनीय बिंदु पर ही होगा:

कोनीय बिंदु	Z का मान	
O (0, 0)	510 (0) + 675 (0) = 0	
A (300, 0)	510 (300) + 675 (0) = 153000	
B (180, 120)	510 (180) + 675 (120) = **172800**	← अधिकतम
C (0, 240)	510 (0) + 675 (240) = 162000	

अत: अधिकतम Z, बिंदु (180, 120) पर 172800 है, अर्थात, कंपनी को अधिकतम लाभ पाने के लिए 180 काले-सफेद सेट तथा 120 रंगीन सेट बनाने चाहिये।

उदाहरण 6 $Z = 3x + 5y$ का नीचे दिए व्यवरोधों के अंतर्गत न्यूनतमीकरण कीजिए:

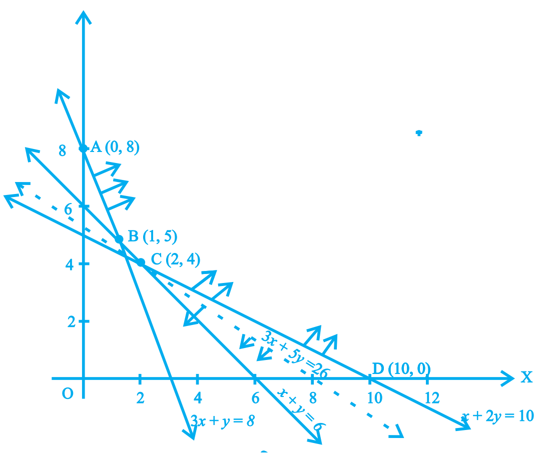
$$x + 2y \geq 10$$
$$x + y \geq 6$$
$$3x + y \geq 8$$
$$x, y \geq 0$$

हल हम पहले $x + 2y = 10$, $x + y = 6$, $3x + y = 8$ के आरेख खींचते हैं। आकृति 12.5 में छायांकित क्षेत्र ABCD उपर्युक्त व्यवरोधों द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र (R) है। सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। इसलिए Z का न्यूनतम मान हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है। यदि न्यूनतम मान है, तो वह किसी कोनीय बिंदु पर होगा।

कोणीय बिंदु	Z का मान	
A (0, 8)	40	
B (1, 5)	28	
C (2, 4)	**26**	← न्यूनतम
D (10, 0)	30	

हम $3x + 5y < 26$ का आरेख खींचते हैं जैसा कि आकृति 12.5 में बिंदुकित रेखा द्वारा दिखाया गया है।

हम देखते हैं $3x + 5y < 26$ द्वारा निर्धारित खुले अर्ध-तल तथा R में कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है। अत:, 26, Z का न्यूनतम मान है।



आकृति 12.5

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 7 तथा 8 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

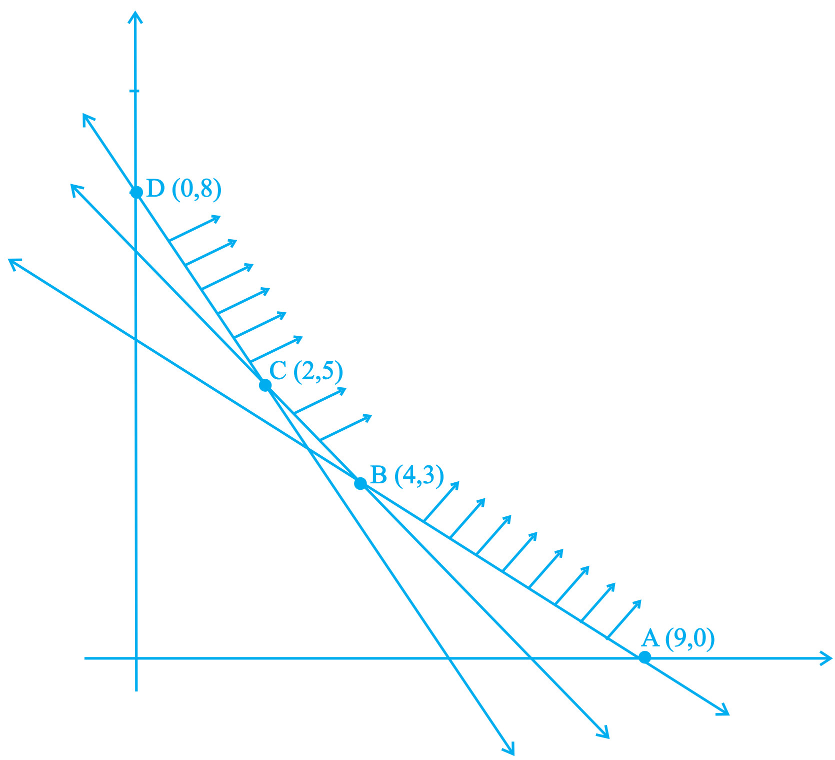
उदाहरण 7 रैखिक व्यवरोधों के एक निकाय द्वारा निर्धारित, किसी सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 10), (5, 5), (15, 15), (0, 20) हैं। मान लीजिए कि $Z = px + qy$, जहाँ $p, q > 0$. p तथा q पर लगने वाला वह प्रतिबंध, जिससे Z का अधिकतम मान (15, 15) तथा (0, 20) दोनों ही बिंदुओं पर प्राप्त हो, तब

(A) $p = q$ (B) $p = 2q$ (C) $q = 2p$ (D) $q = 3p$

हल सही उत्तर (D) है। क्योंकि तभी (15, 15) तथा (0, 20) पर Z का अधिकतम मान प्राप्त होगा।

उदाहरण 8 किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) आकृति 12.6 में प्रदर्शित किया गया है। $Z = 4x + 3y$ का न्यूनतम मान किस बिंदु पर होगा?

(A) (0, 8) (B) (2, 5) (C) (4, 3) (D) (9, 0)



हल सही उत्तर (B) है।

आकृति 12.6

उदाहरण 9 तथा 10 प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

उदाहरण 9 किसी LPP में, वह रैखिक फलन, जिसका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण करना होता है, एक रैखिक ___________ फलन कहलाता है।

हल उद्देश्य

उदाहरण 10 किसी LPP के सभी रैखिक व्यवरोधों द्वारा निर्धारित उभयनिष्ठ क्षेत्र एक ________ क्षेत्र कहलाता है।

हल सुसंगत

बतलाइए कि उदाहरण 11 तथा 12 के कथन सत्य हैं या असत्य–

उदाहरण 11 यदि किसी रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत क्षेत्र (R) परिबद्ध है, तो उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का R में अधिकतम तथा न्यूनतम दोनों ही मान होते हैं।

हल सत्य

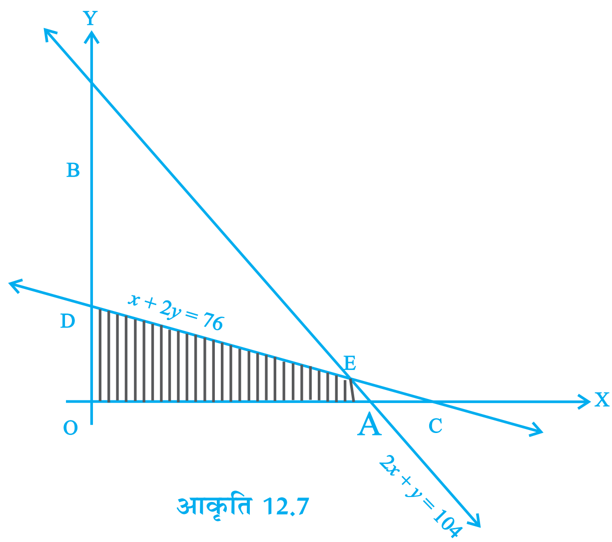
उदाहरण 12 किसी रैखिक प्रोग्रामन समस्या के उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का न्यूनतम मान सदैव किसी एक ही कोनीय बिंदु पर प्राप्त होता है।

हल असत्य। न्यूनतम मान सुसंगत क्षेत्र के एक से अधिक कोनीय बिंदुओं पर भी प्राप्त हो सकता है।

12.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. व्यवरोधों $2x + y \leq 6, x \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$. के अंतर्गत $Z = 11x + 7y$ का अधिकतम मान निर्धारित कीजिए।
2. व्यवरोधों $x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$. के अंतर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण कीजिए।
3. व्यवरोधों $x \leq 3, \ y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$ के अंतर्गत फलन $Z = 11x + 7y$ का अधिक-तमीकरण कीजिए।

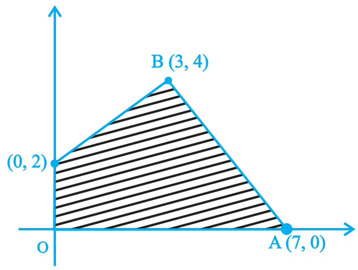


आकृति 12.7

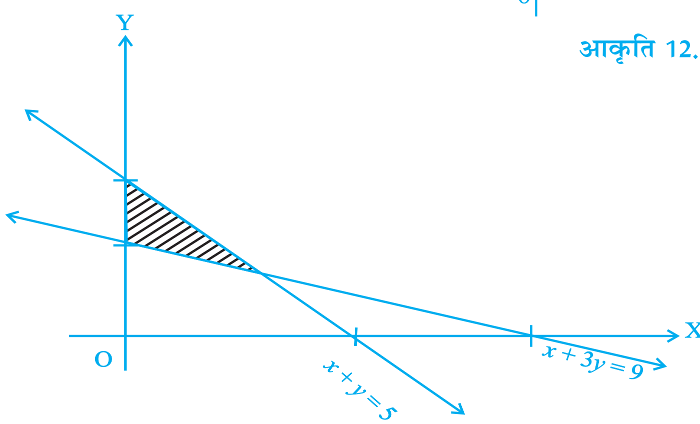
4. व्यवरोधों $x + y \leq 7, 2x - 3y + 6 \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$ के अतंर्गत $Z = 13x - 15y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

5. $Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए, यदि LPP का सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) आकृति 12.7 में प्रदर्शित है।

6. किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) आकृति 12.8 में प्रदर्शित है। $Z = 5x + 7y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.8



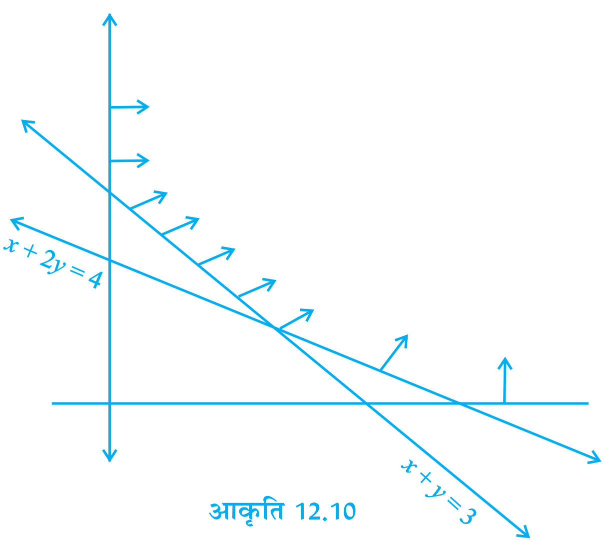
आकृति 12.9

आकृति 12.9

7. किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र आकृति 12.9 में प्रदर्शित है। $Z = 11x + 7y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

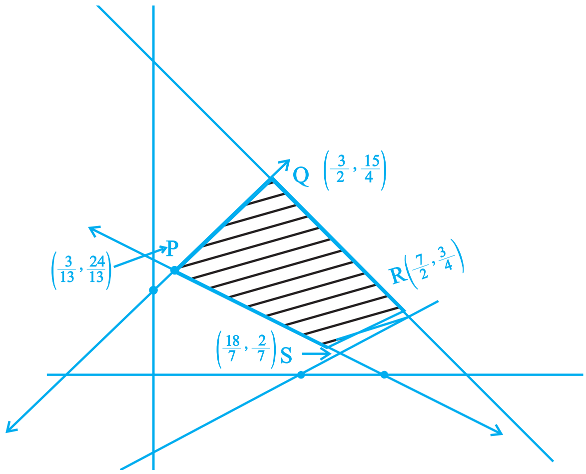
8. उपर्युक्त प्रश्न संख्या 7 पर ध्यान दीजिए। Z का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

9. किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र आकृति 12.10 में प्रदर्शित है। इस क्षेत्र के प्रत्येक कोनीय बिंदु पर $Z = 4x + y$ का मान निकालिए। Z का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, यदि उसका अस्तित्व है।



आकृति 12.10

10. आकृति 12.11 में एक LPP का सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) प्रदर्शित है। $Z = x + 2y$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान निकालिए।



आकृति 12.11

11. एक इलेक्ट्रानिक परिपथ के निर्माता के पास 200 प्रतिरोधक (resistors), 120 ट्रांजिस्टर तथा 150 संधारित्र (capacitors) का स्टाक है तथा उसे A और B दो प्रकार के परिपथ का उत्पादन करना है। A प्रकार के परिपथ में 20 प्रतिरोधकों, 10 ट्रांजिस्टर तथा 10 संधारित्रों की आवश्यकता पड़ती है। B प्रकार के परिपथ में 10 प्रतिरोधकों, 20 ट्रांजिस्टरों तथा 30 संधारित्रों की आवश्यकता पड़ती है। यदि प्रत्येक A प्रकार के परिपथ पर लाभ 50 रु तथा प्रत्येक B प्रकार के परिपथ पर लाभ 60 रु होता है, तो इस समस्या का एक LPP के रूप में सूत्रण कीजिए ताकि निर्माता अपने लाभ का अधिकतमीकरण कर सके।

12. एक फर्म को बड़ी वैनों, जिनमें से प्रत्येक 200 पैकेज तथा छोटी वैनों, जिनमें से प्रत्येक 80 पैकेज ढो सकती है के उपयोग द्वारा, 1200 पकेज ढोना है। प्रत्येक बड़ी वैन को लगाने पर 400 रु तथा प्रत्येक छोटी वैन को लगाने पर 200 रु खर्च होते हैं। इस कार्य के लिए 3000 रु से अधिक खर्च नहीं किए जा सकते हैं तथा बड़ी वैन की संख्या छोटी वैन की संख्या से अधिक नहीं हो सकती है। इस समस्या का एक LPP के रूप में सूत्रण कीजिए, यदि यह दिया हुआ है कि उद्देश्य कुल लागत का न्यूनतमीकरण करना है।

13. एक कंपनी A तथा B, दो प्रकार के पेंचों का उत्पादन करती है। सभी पेंचों को एक चूड़ी डालने वाली मशीन तथा एक खाँचा मशीन से होकर गुजरना पड़ता है। A प्रकार के पेंचों के एक बक्स को चूड़ी डालने की मशीन के 2 मिनट प्रयोग की तथा खाँचा मशीन के प्रयोग की 3 मिनट की आवश्यकता पड़ती है। B प्रकार के पेंचों के एक बक्स को चूड़ी डालने की मशीन के प्रयोग की

8 मिनट तथा खाँचा मशीन के प्रयोग की 2 मिनट की आवश्यकता पड़ती है। प्रत्येक मशीन एक सप्ताह में 60 घंटे के लिए उपलब्ध है।

इन पेंचों को बेचने पर कंपनी को A प्रकार के पेंचों पर 100 रु प्रति बक्स तथा B प्रकार के पेंचों पर 170 रु प्रति बक्स लाभ प्राप्त होता है।

इस समस्या का एक LPP के रूप में सूत्रण कीजिए, दिया हुआ है कि उद्देश्य लाभ का अधिकतमीकरण करना है।

14. एक कंपनी A तथा B दो प्रकार के स्वेटरों का उत्पादन करती है। A प्रकार के एक स्वेटर बनाने में 360 रु तथा B प्रकार के एक स्वेटर बनाने में 120 रु खर्च होते है। कंपनी प्रतिदिन अधिक से अधिक 300 स्वेटर बना सकती है तथा अधिकतम 72000 रु खर्च कर सकती है। B प्रकार के स्वेटरों की संख्या A प्रकार के स्वेटरों की संख्या से 100 से अधिक नहीं हो सकती है। प्रत्येक B प्रकार के स्वेटर पर 120 रु लाभ अर्जित करती है। कंपनी के कुल लाभ का अधिकतमीकरण करने के लिए इस समस्या का एक LPP के रूप में सूत्रण कीजिए।

15. एक व्यक्ति अपनी मोटरसाइकिल को 50 km/h की रफ्तार से चलाता है। उसे पेट्रोल पर 2 रु प्रति किलोमीटर खर्च करने पड़ते हैं। यदि वह 80 km/h की तेज रफ्तार से चलाता है, तो पेट्रोल का खर्चबढ़ कर 3 रु प्रति किलोमीटर हो जाता है। उसके पास पेट्रोल पर खर्च करने के लिए अधिक से अधिक 120 रु है तथा 1 घंटे का समय है। वह, उस अधिकतम दूरी को ज्ञात करना चाहता है, जो वह तय कर सकता है।

इस समस्या को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में व्यक्त कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

16. प्रश्न संख्या 11 पर ध्यान दीजिए। निर्माता को कितने A प्रकार के तथा कितने B प्रकार के परिपथ उत्पादित करने चाहिए, जिससे उसका लाभ अधिकतम हो? अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।

17. प्रश्न संख्या 12 पर ध्यान दीजिए। न्यूनतम लागत क्या होगी?

18. प्रश्न संख्या 13 पर ध्यान दीजिए। रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए तथा निर्माता (कंपनी) का अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए।

19. प्रश्न संख्या 14 पर ध्यान दीजिए। कंपनी को प्रतिदिन, प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने स्वेटर बनाने चाहिए जिससे अधिकतम लाभ हो? अधिकतम लाभ कितना है?

20. प्रश्न संख्या 15 पर ध्यान दीजिए। वह अधिकतम दूरी ज्ञात कीजिए जिसे व्यक्ति तय कर सकता है।

21. व्यवरोधों $x + 4y \le 8$, $2x + 3y \le 12$, $3x + y \le 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. के आधीन $Z = x + y$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

22. एक निर्माता बाइक के दो मॉडल – मॉडल X तथा मॉडल Y बनाता है/मॉडल X की Y की इकाई को बनाने में 10 जन–घंटे लगते हैं। प्रति सप्ताह कुल 450 जन–घंटे उपलब्ध हैं। विपणन तथा रख–रखाव पर खर्च मॉडल X की प्रत्येक इकाई तथा मॉडल Y की प्रत्येक इकाई पर क्रमशः 2000 रु तथा 1000 रु हैं। इस कार्य के लिए प्रति सप्ताह कुल उपलब्ध धन 80000 रु है। मॉडल X तथा मॉडल Y की प्रत्येक इकाई पर लाभ क्रमशः 1000 रु तथा 500 रु है।

निर्माता को प्रत्येक मॉडल की कितनी बाइक बनानी चाहिए जिससे अधिकतम लाभ मिले? अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।

23. एक व्यक्ति अपने दैनिक आहार के संपूरण के लिए कुछ X तथा कुछ Y टिकियाँ (tablets) खाना चाहता है। X तथा Y टिकियों में लौह, कैल्सियम तथा विटामिन के अंश (मिली ग्राम प्रति टिकिया) नीचे दिए गए हैं:

टिकियाँ	लौह	कैल्सियम	विटामिन
X	6	3	2
Y	2	3	4

उस व्यक्ति को कम से कम 18 mg लौह तत्व, 21 mg कैल्सियम तथा 16 mg विटामिन की आवश्यकता है। प्रत्येक X तथा Y टिकियों का मूल्य क्रमशः 2 रु तथा 1 रु है। अपनी उपर्युक्त आवश्यकता की पूर्ति के लिए उस व्यक्ति को प्रत्येक प्रकार की कितनी टिकियाँ खानी चाहिए जिससे मूल्य न्यूनतम रहे?

24. एक कंपनी परिकलित्रों (Calculators) के तीन मॉडल A, B तथा C का निर्माण फैक्ट्री I तथा फैक्ट्री II में करती है। कंपनी के पास कम से कम मॉडल A के 6400 परिकलित्रों, मॉडल B के 4000 परिकलित्रों तथा मॉडल C के 4800 परिकलित्रों की आपूर्ति का आदेश है। फैक्ट्री I में प्रतिदिन मॉडल A के 50, मॉडल B के 50 तथा मॉडल C के 30 परिकलित्र निर्मित होते हैं। फैक्ट्री II में प्रतिदिन मॉडल C के 40 परिकलित्र निर्मित होते हैं। फैक्ट्री I तथा फैक्ट्री II को चलाने में प्रतिदिन क्रमशः 12000 रु तथा 15000 खर्च होते हैं। प्रत्येक फैक्ट्री को चालू रखने के दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए ताकि लागत मूल्य कम से कम हो तथा फिर भी माँग पूरी हो सके।

25. व्यवरोधों: $x - 2y \le 0; -3x + y \le 4, x - y \le 6, x, y \ge 0$ के अंतर्गत $Z = 3x - 4y$ का अधिकतमीकरण तथा न्यूनतमीकरण कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 26 से 34 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

26. व्यवरोधों के एक निकाय द्वारा निर्धारित किसी सुंसगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 0), (0, 40), (20, 40), (60, 20), (60, 0) हैं। उद्देश्य फलन $Z = 4x + 3y$ है।

स्तंभ A तथा स्तंभ B की राशियों की तुलना कीजिए।

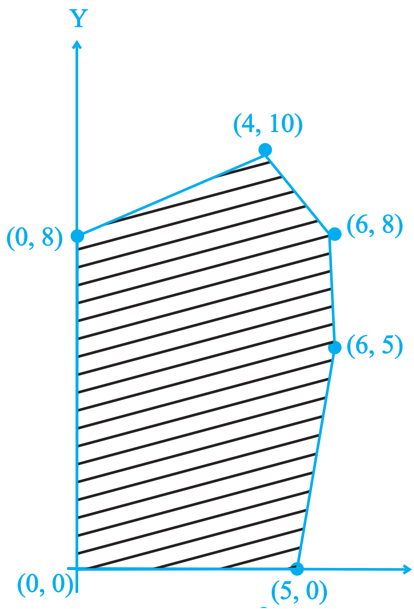
स्तम्भ A	**स्तम्भ B**
Z का अधिकतम मान	325

(A) स्तंभ A की राशि अधिक है

(B) स्तंभ B की राशि अधिक है

(C) दोनों राशियाँ समान हैं

(D) प्रदत्त सूचनाओं के आधार पर दोनों राशियों का परस्पर संबंध निर्धारित नहीं किया जा सकता है।



आकृति 12.12

27. आकृति 12.12 में किसी LPP का सुसंगत हल प्रदर्शित है। मान लीजिए कि $Z = 3x - 4y$, उद्देश्य फलन है। Z का अधिकतम मान किस बिंदु पर है?

(A) (0, 0) (B) (0, 8) (C) (5, 0) (D) (4, 10) पर है।

28. प्रश्न संख्या 27 पर ध्यान दीजिए। Z का अधिकतम मान किस बिंदु पर है?

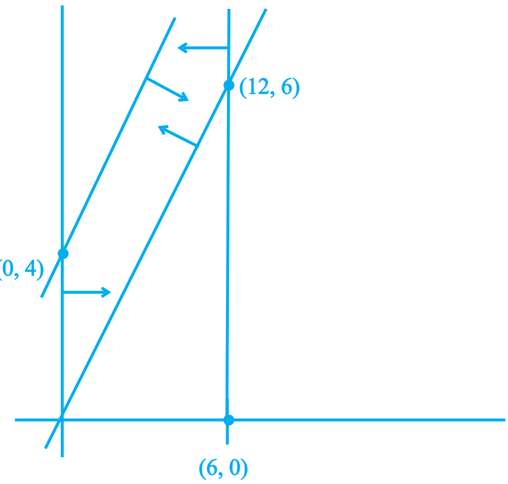
(A) (5, 0) (B) (6, 5) (C) 6, 8) (D) (4, 10)

29. प्रश्न संख्या 27 पर ध्यान दीजिए। Z का अधिकतम मान + Z का न्यूनतम मान बराबर है:

(A) 13 (B) 1 (C) – 13 (D) – 17 के बराबर है।

30. आकृति 12.13 में एक LPP का सुसंगत क्षेत्र प्रदर्शित है। मान लीजिए कि $F = 3x - 4y$ उद्देश्य फलन है। F का अधिकतम मान होगा?

(A) 0 (B) 8 (C) 12 (D) – 18



आकृति 12.13

31. प्रश्न संख्या 30 पर ध्यान दीजिए। F का न्यूनतम मान है:

(A) 0 (B) – 16 (C) 12 (D) का अस्तित्व नहीं हैं।

32. किसी LPP के सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 2), (3, 0), (6, 0), (6, 8) तथा (0, 5) हैं। मान लीजिए कि $F = 4x + 6y$ उद्देश्य फलन है। F का न्यूनतम मान किस बिंदु पर है?

(A) केवल (0, 2) पर

(B) केवल (3, 0) पर

(C) (0, 2) तथा (3, 0) बिंदुओं को मिलाने वाले रेखांखण्ड के मध्य बिंदु पर

(D) (0, 2) तथा (3, 0) बिंदुओं को मिलाने वाले रेखांखण्ड के किसी भी बिंदु पर

33. प्रश्न संख्या 32 पर ध्यान दीजिए। F का अधिकतम मान –F का न्यूनतम मान बराबर है:

(A) 60 (B) 48 (C) 42 (D) 18

34. किसी रैखिक व्यवरोधों के निकाय द्वारा निर्धारित एक सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 3), (1, 1) तथा (3, 0) हैं। मान लीजिए कि $Z = px+qy$, (जहाँ $p, q > 0$) उद्देश्य फलन है। p तथा

q पर लगने वाला वह प्रतिबंध, जिससे Z का न्यूनतम मान (3, 0) तथा (1, 1) पर प्राप्त होगा:

(A) $p = 2q$ (B) $p = \frac{q}{2}$ (C) $p = 3q$ (D) $p = q$

प्रश्न संख्या 35 से 42 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

35. किसी LPP में असमिकाओं या चरों पर लगने वाले प्रतिबंधों को ________ कहते हैं।

36. किसी LPP में उद्देश्य फलन सदैव ________ होता है।

37. यदि किसी LPP में सुसंगत क्षेत्र ________ है, तो उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ के इष्टतम मान का आस्तित्व हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है।

38. किसी LPP में, यदि उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का सुसंगत क्षेत्र के दो कोनीय बिंदुओं पर समान अधिकतम मान हो, तो इन बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड के सभी बिंदुओं पर समान ________ मान प्राप्त होता है।

39. रैखिक असमिकाओं के एक निकाय द्वारा निर्धारित किसी सुसंगत क्षेत्र को ________ कहते हैं, यदि उस क्षेत्र को एक वृत्त के भीतर परिबद्ध किया जा सकता है।

40. किसी सुसंगत क्षेत्र कोनीय बिंदु उस क्षेत्र का वह बिंदु है जो उसकी दो परिसीमा रेखाओं का ________ है।

41. किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र सदैव एक ________ बहुभुज होता है।

बताइए कि प्रश्न संख्या 42 से 45 तक में दिए हुए कथन सत्य हैं या असत्य?

42. यदि किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है, तो उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ के अधिकतम मान या न्यूनतम मान का अस्तित्व हो सकता है या नहीं भी हो सकता है।

43. किसी LPP के उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का अधिकतम मान सदैव सुसंगत क्षेत्र के केवल एक कोणीय बिंदु पर प्राप्त होता है।

44. किसी LPP के उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का न्यूनतम मान सदैव 0 होता है, यदि मूल बिंदु उसके सुसंगत क्षेत्र का एक कोनीय बिंदु है।

45. किसी LPP में, उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का अधिकतम मान सदैव परिमित होता है।

अध्याय 13

प्रायिकता

13.1 समग्र अवलोकन (Overview)

13.1.1 *सप्रतिबंध प्रायिकता*

यदि E तथा F किसी यादृच्छिक परीक्षण के एक ही प्रतिदर्श समष्टि से सबंधित दो घटनाएँ हैं, तो उस स्थिति में जब घटना F घटित हो चुकी हो, प्रतीक P (E | F) द्वारा निरूपित घटना E की सप्रतिबंध प्रायिकता निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होती है:

$$P(E\,|\,F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \quad P(F) \neq 0$$

13.1.2 *सप्रतिबंध प्रायिकता के गुण*

मान लीजिए कि E तथा F किसी प्रतिदर्श समष्टि S से संबंधित घटनाएँ हैं, तो

(i) $P(S\,|\,F) = P(F\,|\,F) = 1$

(ii) $P[(A \cup B)\,|\,F] = P(A\,|\,F) + P(B\,|\,F) - P[(A \cap B\,|\,F)]$,

जहाँ A, B और S से संबंधित कोई दो घटनाएँ हैं।

(iii) $P(E'\,|\,F) = 1 - P(E\,|\,F)$

13.1.3 *प्रायिकता का गुणन नियम*

मान लीजिए कि E तथा F किसी परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित दो घटनाएँ हैं, तो

$$P(E \cap F) = P(E)\,P(F\,|\,E),\ P(E) \neq 0$$
$$= P(F)\,P(E\,|\,F),\ P(F) \neq 0$$

यदि E, F तथा G किसी प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित तीन घटनाएँ हों, तो

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\,P(F\,|\,E)\,P(G\,|\,E \cap F)$$

13.1.4 स्वतंत्र घटनाएँ

मान लीजिए कि E तथा F किसी प्रतिदर्श समष्टि S से संबधित दो घटनाएँ हैं। यदि उनमें से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता दूसरे के घटित होने से प्रभावित नहीं होती है, तो हम कहते हैं कि दोनों घटनाएँ स्वतंत्र हैं। अतः दो घटनाएँ E तथा F स्वतंत्र होंगी, यदि

(a) $P(F \mid E) = P(F)$, जब कि $P(E) \neq 0$

(b) $P(E \mid F) = P(E)$, जब कि $P(F) \neq 0$

प्रायिकता के गुणन प्रमेय के उपयोग द्वारा

(c) $P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$

तीन घटनाएँ A, B तथा C परस्पर स्वतंत्र कहलाती हैं, यदि निम्नलिखित सभी प्रतिबंध प्रभावी (hold) हों :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)\, P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)\, P(C)$$

तथा $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$

13.1.5 प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन

घटनाओं $E_1, E_2, \ldots, E_n$ का एक समुच्चय किसी प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करता है, यदि

(a) $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$

(b) $E_i \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$, तथा

(c) प्रत्येक $E_i \neq \phi$, अर्थात $P(E_i) > 0$ सभी $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ के लिए

13.1.6 संपूर्ण प्रायिकता का प्रमेय

मान लीजिए कि $\{E_1, E, \ldots, E_n\}$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है। मान लीजिए कि A प्रतिदर्श समष्टि S से संबद्ध (associated) कोई घटना है, तो

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A \mid E_j)$$

13.1.7 बेज प्रमेय (Bayes' Theorem)

यदि $E_1, E_2,..., E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि से संबद्ध परस्पर अपवर्जित (mutually exclusive)और निशेष (exhaustive) घटनाएँ हों तथा A एक शून्येतर प्रायिकता वाली कोई भी घटना हो, तो

$$P(E_i | A) = \frac{P(E_i)P(A | E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A | E_i)}$$

13.1.8 यादृच्छिक चर और उसका प्रायिकता बंटन

एक यादृच्छिक चर वह वास्तविक मान फलन है, जिसका प्रांत किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि होता है

किसी यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन संख्याओं का नीचे दिया गया निकाय (system)होता है।

X :	x_1	x_2	...	x_n
P(X) :	p_1	p_2	...	p_n

जहाँ $p_i > 0,\ i = 1, 2,..., n,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

13.1.9 यादृच्छिक चर का माध्य तथा प्रसरण

मान लीजिए कि X एक ऐसा यादृच्छिक चर है जिसकी लिये गये मानों $x_1, x_2,...., x_n$ के लिए प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$ ऐसी हैं, कि $p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ प्रतीक μ द्वारा व्यक्त X का माध्य [अथवा X का संभावित मान जिसे E (X) द्वारा निरूपित करते हैं] निम्नलिखित प्रकार परिभाषित है।

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

तथा σ^2 द्वारा निरूपित X का प्रसरण निम्नलिखित रूप में परिभाषित है।

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$$

अथवा समतुल्यत: $\sigma^2 = E(X - \mu)^2$

यादृच्छिक चर X का मानक विचलन निम्नलिखित रूप में परिभाषित है।

$$\sigma = \sqrt{\text{variance (X)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \; p_i}$$

13.1.10 *बर्नूली अभिप्रयोग (Bernoulli Trials)*

किसी यादृच्छिक प्रयोग की जाँच को बर्नूली अभिप्रयोग कहते हैं यदि वे निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हों:

(i) अभिप्रयोग की संख्या परिमित (निश्चित) होनी चाहिए

(ii) अभिप्रयोग स्वंतत्र होने चाहिए

(iii) प्रत्येक अभिप्रयोग के तथ्यत: दो परिणाम होने चाहिए, सफलता, या असफलता

(iv) सफलता (या असफलता) की प्रायिकता प्रत्येक अभिप्रयोग में समान रहनी चाहिए

13.1.11 *द्विपद बंटन*

0, 1, 2, ..., n मान धारण करने वाले किसी यादृच्छिक चर X को प्राचल n तथा p वाला द्विपद बंटन रखने वाला चर कहते हैं, यदि इसकी प्रायिकता बंटन निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त हो,

$P(X = r) = {}^nc_r\, p^r q^{n-r}$, जहाँ $q = 1 - p$ rFkk $r = 0, 1, 2, ..., n.$

13.2 हल किए हुए उदाहरण

लघुउत्तरीय (S. A.)

उदाहरण 1 किसी महाविद्यालय में प्रवेश चाहने वाले A तथा B दो अभ्यर्थी हैं। A के चुने जाने की प्रायिकता 0.7 है तथा दोनों में से केवल एक के चुने जाने की प्रायिकता 0.6 है। B के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि B के चुने जाने की प्रायिकता p है।

P (A और B में से केवल एक के चुने जाने की) = 0.6 (दिया है।)

P(A के चुने जाने तथा B के नहीं चुने जाने की अथवा B के चुने जाने तथा A के नहीं चुने जाने की) = 0.6

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = 0.6$$

$$P(A)\, P(B') + P(A')\, P(B) = 0.6$$

$$(0.7)(1 - p) + (0.3)\, p = 0.6$$

$$p = 0.25$$

अत: B के चुने जाने की प्रायिकता 0.25 है।

उदाहरण 2 दो घटनाओं A तथा B में से कम से कम एक की समकालिक एक साथ घटित होने की प्रायिकता p है। यदि A तथा B में से केवल एक के घटित होने की प्रायिकता q हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$P(A') + P(B') = 2 - 2p + q.$$

हल क्योंकि P (A तथा B में से केवल एक के घटित केवल) = q (दिया है)

इससे हम प्राप्त करते हैं $\quad P(A \cup B) - P(A \cap B) = q$

$$\Rightarrow \quad p - P(A \cap B) = q$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = p - q$$

$$\Rightarrow \quad 1 - P(A' \cup B') = p - q$$

$$\Rightarrow \quad P(A' \cup B') = 1 - p + q$$

$$\Rightarrow \quad P(A') + P(B') - P(A' \cap B') = 1 - p + q$$

$$\Rightarrow \quad P(A') + P(B') = (1 - p + q) + P(A' \cap B')$$

$$= (1 - p + q) + (1 - P(A \cup B))$$

$$= (1 - p + q) + (1 - \mathrm{p})$$

$$= 2 - 2p + q$$

उदाहरण 3 किसी कारखाने में निर्मित 10% बल्ब लाल रंग के हैं जिन में 2% खराब हैं। यदि एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाए, तो उसके खराब होने की प्रायिकता निर्धारित कीजिए यदि वह लाल रंग का हो।

हल मान लीजिए की बल्ब के लाल रंग के होने की तथा बल्ब के खराब होने की घटनाएँ क्रमशः A तथा B हैं।

$$P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \qquad P(A \quad B) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{50} \times \frac{10}{1} = \frac{1}{5}$$

अतः बल्ब के खराब होने की प्रायिकता, यदि वह लाल रंग का है, $\frac{1}{5}$ है।

उदाहरण 4 दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। मान लीजिए कि घटना A 'पहले पासे पर अंक 6 प्राप्त होना' है तथा घटना B 'दूसरे पासे पर अंक 2 प्राप्त होना' है। क्या A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं?

हल $A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$

$A \cap B = \{(6, 2)\}$

$$P(A) \quad \frac{6}{36} \quad \frac{1}{6}, \quad P(B) \quad \frac{1}{6}, \qquad P(A \quad B) \quad \frac{1}{36}$$

घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र होंगी, यदि $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$ हो।

$$\text{बायाँ} = P(A \cap B) = \frac{1}{36}, \quad \text{दायाँ} = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

क्योंकि बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अतः A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण 5 8 लड़कों तथा 4 लड़कियों के किसी समूह से यदृच्छया 4 विद्यार्थियों की एक समिति का चयन किया जाता है। दिया हुआ है कि समिति में कम से कम एक लड़की है, तो समिति में ठीक : 2 लड़कियों के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि कम से कम एक लड़की के चुने जाने की घटना को A से तथा ठीक : 2 लड़कियों के चुने जाने की घटना को B से निरूपित किया जाता है, तो हमें $P(B \mid A)$ ज्ञात करना है।

क्योंकि कम से कम एक लड़की के चुने जाने की घटना को A से निरूपित करते हैं, इसलिए एक भी लड़की नहीं चुने जाने की घटना अर्थात् चारों लड़के चुने जाने की घटना A से निरूपित होगी। अतएव

$$P(A') = \frac{{}^{8}C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{70}{495} = \frac{14}{99}$$

$$P(A) \quad 1 - \frac{14}{99} \quad \frac{85}{99}$$

अब $P(A \cap B) = P$ (2 लड़के तथा 2 लड़कियाँ) $= \dfrac{{}^{8}C_2 \,.\, {}^{4}C_2}{{}^{12}C_4} = \dfrac{6 \times 28}{495} = \dfrac{56}{165}$

अत: $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{56}{165} \times \dfrac{99}{85} = \dfrac{168}{425}$

उदाहरण 6 किसी कारखाने में E_1, E_2 तथा E_3 तीन मशीन बिजली के ट्यूबों के प्रतिदिन के कुल उत्पाद का क्रमशः 50%, 25% तथा 25% बनाती हैं। यह ज्ञात है कि E_1 तथा E_2 मशीनों में से प्रत्येक पर निर्मित 4% ट्यूब खराब होती हैं और मशीन E_3 पर निर्मित 5% ट्यूब खराब होती हैं। यदि किसी दिन के उत्पाद से एक ट्यूब यादृच्छया निकाला जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह खराब होगी।

हल मान लीजिए कि D निकाली गई ट्यूब के खराब होने की घटना है।

मान लीजिए कि A_1, A_2 तथा A_3 क्रमशः मशीनों E_1, E_2 तथा E_3 पर ट्यूब बनाये जाने की घटनाओं को व्यक्त करते हैं।

$$P(D) = P(A_1)\, P(D \mid A_1) + P(A_2)\, P(D \mid A_2) + P(A_3)\, P(D \mid A_3) \qquad (1)$$

$$P(A_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},\ P(A_2) = \frac{1}{4},\ P(A_3) = \frac{1}{4}$$

साथ ही $\quad P(D \mid A_1) = P(D \mid A_2) = \dfrac{4}{100} = \dfrac{1}{25}$ तथा $P(D \mid A_3) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$.

इन मानों को (1) में रखने से हमें प्राप्त होता है

$$P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{25} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{80} = \frac{17}{400} = .0425$$

उदाहरण 7 किसी अनभिनत पासे को 10 बार फेंकने पर कम से कम 8 बार अंक 3 का गुणज प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ अंक 3 का गुणज अर्थात 3 या 6 प्राप्त होना सफलता है।

इसलिए $$p\,(3 \text{ या } 6) = \frac{2}{6} \quad \frac{1}{3} \Rightarrow \quad q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

10 बार फेंकने पर r सफलता और प्रायिकता,

$$\text{P}\,(r) = {}^{10}\text{C}_r \quad \frac{1}{3}^{\;r} \quad \frac{2}{3}^{\;10-r}$$

अब P (कम से कम 8 सफलता) = P (8) + P (9) + P (10)

$$= {}^{10}\text{C}_8 \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}^{10}\text{C}_9 \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}^{10}\text{C}_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$= \frac{1}{3^{10}}\,[45 \times 4 + 10 \times 2 + 1] \;=\; \frac{201}{3^{10}}$$

उदाहरण 8 किसी असंतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है

X	1	2	3	4	5	6	7
P (X)	C	2C	2C	3C	C^2	$2C^2$	$7C^2 + C$

C का मान ज्ञात कीजिए। बंटन का माध्य भी ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\Sigma\, p_i = 1$, इसलिए

$$C + 2C + 2C + 3C + C^2 + 2C^2 + 7C^2 + C = 1$$

अर्थात् $$10C^2 + 9C - 1 = 0$$

अर्थात् $$(10C - 1)\,(C + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad C = \frac{1}{10}, \qquad C = -1$$

अतः C का स्वीकार्य मान $\frac{1}{10}$ (क्यों?)

$$\text{माध्य} = \mathop{}\limits_{i\ 1}^{n} x_i\, p_i \;=\; \mathop{}\limits_{i\ 1}^{7} x_i\, p_i$$

$$1\ \frac{1}{10}\quad 2\ \frac{2}{10}\quad 3\ \frac{2}{10}\quad 4\ \frac{3}{10}\quad 5\ \frac{1}{10}^{2}\quad 6\quad 2\ \frac{1}{10}^{2}\quad 7\ \ 7\ \frac{1}{10}^{2}\quad \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{10}\quad \frac{4}{10}\quad \frac{6}{10}\quad \frac{12}{10}\quad \frac{5}{100}\quad \frac{12}{100}\quad \frac{49}{100}\quad \frac{7}{10}$$

$= 3.66$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 9 एक बॉक्स में 8 लाल तथा 4 सफ़ेद गेंद हैं। चार गेंदों को बिना प्रतिस्थापना के निकाला है। यदि X निकाली गयी लाल गेंदों की संख्या को निरूपित करता है, तो X का प्रायिकता बटंन ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि 4 गेंद निकाली जानी हैं, इसलिए X का मान 0, 1, 2, 3, 4 हो सकता है।

P (X = 0) = P (एक भी लाल गेंद नहीं) = P (4 सफ़ेद गेंद)

$$\frac{{}^{4}C_{4}}{{}^{12}C_{4}} \quad \frac{1}{495}$$

P (X = 1) = P (एक लाल तथा 3 सफ़ेद गेंद)

$$\frac{{}^{8}C_{1}\quad {}^{4}C_{3}}{{}^{12}C_{4}} \quad \frac{32}{495}$$

P (X = 2) = P (2 लाल तथा 2 सफ़ेद)

$$\frac{{}^{8}C_{2}\quad {}^{4}C_{2}}{{}^{12}C_{4}} \quad \frac{168}{495}$$

P (X = 3) = P (3 लाल तथा 1 सफ़ेद गेंद)

$$\frac{{}^{8}C_{3}\quad {}^{4}C_{1}}{{}^{12}C_{4}} \quad \frac{224}{495}$$

$$P(X=4) = P(4 \text{ लाल गेंद}) \quad \frac{{}^{8}C_{4}}{{}^{12}C_{4}} \quad \frac{70}{495}$$

अत: X का अभीष्ट प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है।

X	0	1	2	3	4
P (X)	$\frac{1}{495}$	$\frac{32}{495}$	$\frac{168}{495}$	$\frac{224}{495}$	$\frac{70}{495}$

उदाहरण 10 किसी सिक्के को तीन बार उछालने पर प्राप्त 'चित, (Heads) की संख्या का प्रसरण तथा मानक विचलन निर्धारित कीजिए।

हल मान लीजिए कि X 'चित' प्राप्त होने की संख्या को निरूपित करता है। इसलिए X का मान 0, 1, 2, 3 हो सकता है। जब किसी सिक्के को तीन बार उछाला जाता है, तो

प्रतिदर्श समष्टि S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$$P(X=0) = P(\text{ कोई चित नहीं}) = P(TTT) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(\text{एक चित}) = P(HTT, THT, TTH) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = P(\text{दो चित}) = P(HHT, HTH, THH) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = P(\text{तीन चित}) = P(HHH) = \frac{1}{8}$$

अत: X का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है:

X	0	1	2	3
P (X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

X का प्रसरण $= \sigma^2 = \Sigma x_i^2 p_i - \mu^2$, (1)

जहाँ μ, X का माध्य है, जो निम्नलिखित प्रकार प्राप्त होता है।

$$\mu = \Sigma\, x_i\, p_i = 0 \quad \frac{1}{8} \quad 1 \quad \frac{3}{8} \quad 2 \quad \frac{3}{8} \quad 3 \quad \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{2} \qquad (2)$$

अब,

$$\Sigma\, x_i^2\, p_i = 0^2 \quad \frac{1}{8} \quad 1^2 \quad \frac{3}{8} \quad 2^2 \quad \frac{3}{8} \quad 3^2 \quad \frac{1}{8} \quad 3 \qquad (3)$$

(1), (2) तथा (3) से हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

$$\sigma^2 = 3 - \quad \frac{3}{2} \quad ^{2} \quad \frac{3}{4}$$

अतः मानक विचलन $\sqrt{\quad ^{2}} \quad \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण 11 उदाहरण 6 के संदर्भ में इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि खराब ट्यूब मशीन E_1 में निर्मित हुई।

हल यहाँ हमें $P(A_1 / D)$ ज्ञात करना है।

$$P(A_1 / D) = \frac{P(A_1 \quad D)}{P(D)} \quad \frac{P(A_1)\, P(D/A_1)}{P(D)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{25}}{\frac{17}{400}} = \frac{8}{17}$$

उदाहरण 12 किसी कार निर्मित करने वाले कारखाने में दो संयंत्र X तथा Y हैं। संयंत्र X, 70% तथा संयंत्र Y, 30% कारों का निर्माण करता है। संयंत्र X द्वारा निर्मित 80% तथा संयंत्र Y द्वारा निर्मित 90% कारें मानक गुणवत्ता वाली आँकी गयी हैं। एक कार यादृच्छया चुनी जाती है और वह मानक गुणवत्ता वाली पाई जाती है। इस कार के संयंत्र X द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता क्या है?

हल 'कार मानक गुणवत्ता वाली है' को घटना E मान लीजिए। घटनाओं 'कार X संयंत्र में निर्मित हुई' तथा 'कार Y संयंत्र में निर्मित हुई' को क्रमशः B_1 तथा B_2 मान लीजिए।

अब $\qquad P\,(B_1) = \dfrac{70}{100} = \dfrac{7}{10}$, $P\,(B_2) = \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$

$P\,(E \mid B_1)$ = मानक गुणवत्ता वाली कार के संयंत्र X में निर्मित होने की प्रायिकता

$$= \frac{80}{100} = \frac{8}{10}$$

इसी प्रकार, $\qquad P\,(E \mid B_2) = \dfrac{90}{100} = \dfrac{9}{10}$

अत: $\qquad P\,(B_1 \mid E)$ = मानक गुणवत्ता वाली कार के संयंत्र X द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता

$$= \frac{P\,(B_1) \times P\,(E \mid B_1)}{P\,(B_1)\,.\,P\,(E \mid B_1) + P\,(B_2)\,.\,P\,(E \mid B_2)} = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{8}{10}}{\frac{7}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{9}{10}} \quad \frac{56}{83} \text{ है।}$$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{56}{83}$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 13 से 17 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

उदाहरण 13 मान लीजिए कि A तथा B दो घटनाएँ हैं। यदि $P\,(A) = 0.2$, $P\,(B) = 0.4$, $P\,(A \cup B) = 0.6$, तो $P\,(A \mid B)$ बराबर होगा

(A) 0.8 $\qquad$ (B) 0.5 $\qquad$ (C) 0.3 $\qquad$ (D) 0

हल दिए हुए आंकड़ों से $P\,(A) + P\,(B) = P\,(A \cup B)$. इससे स्पष्ट है कि

$P\,(A \cap B) = 0$. अत: $P\,(A \mid B) = \dfrac{P\,(A \quad B)}{P\,(B)} = 0$.

अत: सही उत्तर (D) है।

उदाहरण 14 मान लीजिए कि A तथा B दो घटनाएँ ऐसी हैं कि $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.2$, तथा $P\,(A \mid B) = 0.5$. $P\,(A' \mid B')$ बराबर होगा:

(A) $\dfrac{1}{10}$ $\qquad$ (B) $\dfrac{3}{10}$ $\qquad$ (C) $\dfrac{3}{8}$ $\qquad$ (D) $\dfrac{6}{7}$

हल $P(A\cap B) = P(A \mid B)\, P(B) \quad = 0.5 \times 0.2 = 0.1$

$$P(A' \mid B') = \frac{P(A'\cap B')}{P(B')} = \frac{P[(A\cup B')]}{P(B')} = \frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$$

$$= \frac{1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)}{1-0.2} = \frac{3}{8}$$

अतः सही उत्तर (C) है।

उदाहरण 15 यदि A तथा B ऐसी स्वतंत्र घटनाएँ हैं कि $0 < P(A) < 1$ तथा $0 < P(B) < 1$, तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य नहीं है?

(A) A तथा B परस्पर अपवर्जीत हैं। (B) A तथा B' स्वतंत्र हैं।

(C) A' तथा B स्वतंत्र हैं। (D) A' तथा B' स्वतंत्र हैं।

हल सही उत्तर (A) है।

उदाहरण 16 मान लीजिए कि X एक असंतत यादृच्छिक चर है। X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है।

X	30	10	– 10
P (X)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

E (X) का मान होगा।

(A) 6 (B) 4 (C) 3 (D) – 5

हल $E(X) = 30\times\frac{1}{5}+10\times\frac{3}{10}-10\times\frac{1}{2}=4$

अतः सही उत्तर (B) है।

उदाहरण 17 मान लीजिए कि X एक असंतत यादृच्छिक चर है जो $x_1, x_2, ..., x_n$ मान धारण करता है जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$, हैं, तो X का प्रसरण होगा

(A) $E(X^2)$ (B) $E(X^2) + E(X)$ (C) $E(X^2) - [E(X)]^2$ (D) $\sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$

हल सही उत्तर (C) है।

उदाहरण 18 तथा 19 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

उदाहरण 18 यदि A तथा B ऐसी स्वतंत्र घटनाएँ है कि P (A) = p, P (B) = $2p$ तथा

P (A, B में से केवल एक) = $\frac{5}{9}$, तो p = __________ होगा

हल $\left[(1-p)(2p)+p(1-2p)=3p-4p^2=\frac{5}{9}\right]$

इससे प्राप्त होता है : $p=\frac{1}{3},\frac{5}{12}$

उदाहरण 19 यदि A तथा B′ स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो P (A′∪B) = 1 – ________

हल $P(A'\cup B) = 1 - P(A\cap B') = 1 - P(A)\,P(B')$ (क्योंकि A तथा B′ स्वतंत्र घटनाएँ हैं।)

अत: खाली स्थान में P(A) P (B′) भरा जायेगा।

बताइए कि 20 से 22 तक के उदाहरणों में से प्रत्येक में दिया हुआ कथन सत्य है या असत्य?

उदाहरण 20 यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो $P(A\cap B) = P(A) + P(B)$

हल असत्य, क्योंकि $P(A\cap B) = P(A)\,.\,P(B)$, जहाँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण 21 तीन घटनाएँ A, B तथा C स्वतंत्र कहलाती हैं, यदि $P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$

हल असत्य। कारण यह है कि A, B, C, स्वतंत्र होती हैं, यदि वे युग्मत: (pairwise) स्वतंत्र हों तथा $P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ हो

उदाहरण 22 बर्नूली अभिप्रयोगों के प्रतिबंधों में से एक यह है कि अभिप्रयोग एक दूसरे से स्वतंत्र होने चाहिए।

हल सत्य

13.3. प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. किसी भारित (loaded) पासे के लिए घटित होने वाले परिणामों की प्रायिकताएँ नीचे दी हुई हैं P(1) = P(2) = 0.2, P(3) = P(5) = P(6) = 0.1 तथा P(4) = 0.3.

पासे को दो बार फेंका जाता है। मान लीजिए कि A तथा B क्रमश: घटनाओं 'प्रत्येक बार एक ही संख्या आना' तथा B घटना 'कुल स्कोर 10 या 10 से अधिक आना' को निरूपित करता है। निर्धारित कीजिए कि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं या नहीं।

2. उपर्युक्त प्रश्न संख्या 1 पर ध्यान दीजिए। यदि पासा अनभिनत हो, तो निर्धारित कीजिए कि घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र होंगी या नहीं।

3. A तथा B दो घटनाओं में से कम से कम एक के घटित होने की प्रायिकता 0.6 है। यदि A तथा B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता 0.3 है, तो $P(\overline{A}) + P(\overline{B})$ का मान निकालिए।

4. एक थैले में 5 लाल तथा 3 काले कंचे हैं। तीन कंचों को एक-एक करके बिना प्रतिस्थापित किए निकाला जाता है। निकाले गए तीन कंचों में से कम से कम एक कंचे के काले होने की प्रायिकता क्या है, यदि निकाला गया पहला कंचा लाल रंग का है?

5. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है और प्राप्त संख्याओं का योगफल नोट कर लिया जाता है। घटनाएँ E, F तथा G क्रमशः 'योगफल 4' 'योगफल 9 या 9 से अधिक' तथा 'योगफल संख्या 5 से भाज्य' को निरूपित करती हैं। P(E), P(F) तथा P(G) को परिकलित कीजिए और निर्णय कीजिए कि घटनाओं का कौन सा जोड़ा (युग्म) स्वतंत्र है।

6. स्पष्ट कीजिए कि किसी सिक्के को तीन बार उछालने के परीक्षण को द्विपद बंटन रखने वाला क्यों कहा जाता है।

7. A तथा B दो घटनाएँ ऐसी हैं कि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$। ज्ञात कीजिए:

(i) $P(A|B)$ (ii) $P(B|A)$ (iii) $P(A'|B)$ (iv) $P(A'|B')$

8. तीन घटनाओं A, B तथा C की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{2}$, हैं। दिया है कि $P(A \cap C) = \frac{1}{5}$ तथा $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$; $P(C \mid B)$ तथा $P(A' \cap C')$ के मान ज्ञात कीजिए।

9. मान लीजिए कि E_1 तथा E_2 दो स्वतंत्र घटनाएँ ऐसी हैं कि $p(E_1) = p_1$ तथा $P(E_2) = p_2$. निम्नलिखित प्रायिकताओं वाली घटनाओं का वर्णन शब्दों में कीजिए:

(i) $p_1 \, p_2$ (ii) $(1-p_1) \, p_2$ (iii) $1-(1-p_1)(1-p_2)$ (iv) $p_1 + p_2 - 2p_1p_2$

10. किसी असंतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया हुआ है:

X	0.5	1	1.5	2
P(X)	k	k^2	$2k^2$	k

(i) k का मान ज्ञात कीजिए। (ii) उपर्युक्त बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

11. सिद्ध कीजिए कि:

(i) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

(ii) $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

12. यदि यादृच्छ चर X किसी सिक्के को तीन बार उछालने पर 'पट' आने की संख्या को निरूपित करता है, तो X का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

13. पासे के किसी खेल में एक खिलाड़ी पासे की प्रत्येक फेंक पर 1 रु का दाँव (बाजी) लगाता है। उसे पासे पर 3 आने पर 5 रु मिलते हैं, फेंक के लिए अथवा 6 आने पर 2 रु मिलते हैं अन्यथा कुछ भी नहीं मिलता। पासे को फेंकने के एक लंबे सिलसिले में प्रति फेंक पर खिलाड़ी का संभावित लाभ क्या होगा?

14. तीन पासों को एक साथ फेंका जाता है। तीनों पासों पर 2 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि यह ज्ञात है कि पासों पर प्रकट होने वाली संख्याओं का योग 6 है।

15. किसी लाटरी के 10,000 टिकटों, में से प्रत्येक को 1 रु का बेचा जाता है। प्रथम पुरस्कार 3000 रु का है तथा द्वितीय पुरस्कार 2000 रु का है। इनके अतिरिक्त 500 रु वाले तीन अन्य पुरस्कार हैं। यदि आप एक टिकट खरीदते हैं, तो आप की प्रत्याशा (expectation) क्या होगी?

16. एक थैले में 4 सफेद तथा 5 काली गेंद हैं। एक अन्य थैले में 9 सफेद तथा 7 काली गेंद हैं। पहले थैले से एक गेंद दूसरे थैले में स्थानांतरित कर दी जाती है। तत्पश्चात् दूसरे थैले में से एक गेंद यदृच्छया निकाली जाती है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंद सफेद रंग की है।

17. थैला I में 3 काली तथा 2 सफेद गेंद हैं और थैला II में 2 काली तथा 4 सफेद गेंद हैं। एक थैला तथा एक गेंद यादृच्छया छाँटे जाते हैं। काले रंग की गेंद के छाँटे जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

18. किसी बाक्स में 5 नीली तथा 4 लाल गेंद हैं। एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है और प्रतिस्थापित नहीं की जाती है। उस गेंद का रंग भी नोट नहीं किया जाता है। तत्पश्चात् एक अन्य गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। दूसरी गेंद के नीले रंग की होने की प्रायिकता क्या है?

19. ताश के 52 पत्तों की एक गड्डी से चार पत्ते बिना प्रतिस्थापन एक के बाद एक करके निकाले जाते हैं। सभी चारों पत्तों के ''बादशाह '' होने की प्रायिकता क्या है?

20. एक पासा 5 बार फेंका जाता है। पासे पर ठीक तीन बार विषम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

21. दस सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं। कम से कम 8 चित प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

22. किसी व्यक्ति द्वारा लक्ष्य-भेदन की प्रायिकता 0.25 है। वह 7 बार लक्ष्य-भेदन का प्रयास करता है। उस व्यक्ति द्वारा कम से कम दो बार लक्ष्य भेदने की प्रायिकता क्या है?

23. यह ज्ञात है कि 100 घड़ियों के एक ढेर में 10 घड़ियाँ खराब हैं। यदि 8 घड़ियाँ यादृच्छया, (एक-एक करके बिना प्रतिस्थापन के) चुनी जाती हैं, तो कम से कम एक खराब घड़ी चुनी जाने की प्रायिकता क्या है?

24. एक यादृच्छिक चर X के नीचे दिये गए प्रायिकता बंटन पर विचार कीजिए।

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	0.25	0.3	0.2	0.15

(i) $\operatorname{Var}\left(\dfrac{X}{2}\right)$ (ii) X का प्रसरण को परिकलित कीजिए।

25. किसी यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया है।

X	0	1	2	3
P(X)	k	$\dfrac{k}{2}$	$\dfrac{k}{4}$	$\dfrac{k}{8}$

(i) k का मान निर्धारित कीजिए. (ii) $P(X \leq 2)$ तथा $P(X > 2)$ निर्धारित कीजिए

(iii) $P(X \leq 2) + P(X > 2)$ ज्ञात कीजिए।

26. निम्नलिखित प्रायिकता बंटन के लिए यादृच्छिक चर X का मानक विचलन निर्धारित कीजिए:

X	2	3	4
P(X)	0.2	0.5	0.3

27. एक अनभिनत पासा इस प्रकार का है कि $P(4) = \dfrac{1}{10}$ तथा अन्य स्कोर सम सम्भाव्य हैं। पासा दो बार उछाला जाता है। यदि 'पासे पर 4 प्रकट होने की संख्या' X है, तो यादृच्छिक चर X का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

28. एक पासा तीन बार फेंका जाता है। मान लीजिए कि पासे पर 2 आने की संख्या X द्वारा निरूपित होती है। X की प्रत्याशा (expectation) ज्ञात कीजिए।

29. दो अभिनत पासे एक साथ फेंके जाते हैं। पहले पासे के लिए $P(6) = \dfrac{1}{2}$, अन्य स्कोर सम

सम्भाव्य हैं; जब कि दूसरे पासे के लिए $P(1) = \frac{2}{5}$ तथा अन्य स्कोर सम सम्भाव्य हैं। ''1 के प्रकट होने की संख्या'' का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

30. दो असंतत यादृच्छिक चर X तथा Y के प्रायिकता बटंन निम्नलिखित हैं:

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Y	0	1	2	3
P(Y)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

सिद्ध कीजिए कि $E(Y^2) = 2\,E(X)$

31. एक कारखाने में बल्ब बनते हैं। किसी बल्ब के खराब होने की प्रायिकता $\frac{1}{50}$ है तथा बल्बों को दस-दस करके डिब्बों में पैक किया गया है। किसी एक डिब्बे के लिए निम्नलिखित प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) कोई भी बल्ब खराब नहीं है (ii) ठीक दो बल्ब खराब हैं।

(iii) 8 से अधिक बल्ब ठीक काम करते हैं।

32. मान लीजिए कि आपकी जेब में दो सिक्के हैं जो एक जैसे दिखाई देते हैं। आपको ज्ञात है कि एक सिक्का अनभिनत (न्याय्य) है तथा दूसरे सिक्के में दोनों ओर 'चित' (2-headed) है। यदि आप एक सिक्का निकाल कर उछालते हैं और 'चित' प्राप्त करते हैं, तो इस बात की प्रायिकता क्या है कि यह सिक्का न्याय्य है?

33. मान लीजिए कि रुधिर वर्ग O वाले लोगों में 6% वामहस्तिक (left handed) हैं और अन्य रुधिर वर्ग वाले लोगों में 10% वामहस्तिक हैं। 30% लोगों का रुधिर वर्ग O है। यदि एक वामहस्तिक व्यक्ति यादृच्छया चुना जाता है, तो इस बात की प्रायिकता क्या है कि उसका रुधिर वर्ग O है?

34. समुच्चय $S = 1, 2, 3, ..., n$ से दो प्राकृत संख्याएँ r, s, एक बार में एक, बिना प्रतिस्थापन के, निकाली जाती हैं। $P\left[r \le p | s \le p\right]$, जहाँ $p \in S$ ज्ञात कीजिए।

35. जब एक पासे को दो बार फेंका जाता है तो प्राप्त दो स्कोरों में से महत्तम स्कोर का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। बंटन का माध्य भी निर्धारित कीजिए।

36. एक यादृच्छिक चर X केवल 0, 1, 2 मानों को धारण कर सकता है। दिया हुआ है कि $P(X = 0) = P(X = 1) = p$,तथा यह कि $E(X^2) = E[X]$, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

37. निम्नलिखित बंटन का प्रसरण ज्ञात कीजिए:

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

38. A और B पासे के एक जोड़े को बारी-बारी से फेंकते हैं। A जीतता है, यदि वह B द्वारा पासे पर 7 प्राप्त करने से पहले 6 प्राप्त कर लेता है तथा B जीतती है, यदि वह A द्वारा पासे पर 6 प्राप्त करने से पहले 7 प्राप्त कर लेती है। यदि A पासे को फेंकना प्रारम्भ करता है, तो तीसरी फेंक में उसके जीतने का संयोग (प्रायिकता) ज्ञात कीजिए।

39. दो पासे उछाले जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि क्या निम्नलिखित दो घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र हैं:

$A = (x, y) : x+y=11$ $B = (x, y) : x \quad 5$ जहाँ (x, y) एक विशिष्ट प्रतिदर्श बिंदु को निरूपित करते हैं।

40. किसी कलश में m सफ़ेद तथा n काली गेंद है। एक गेंद को यादृच्छया निकाल कर उसी के रंग की k अतिरिक्त गेंदों के साथ कलश में वापस रख दिया जाता है। एक गेंद यादृच्छया पुनः निकाली जाती है। सिद्ध कीजिए कि इस बार सफेद गेंद के निकाले जाने की प्रायिकता k पर निर्भर नहीं है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

41. तीन थैलों में लाल तथा सफ़ेद गेंदों की संख्या निम्नलिखित है।

थैला प्रथम – 3 लाल गेंद

थैला द्वितीय – 2 लाल गेंद तथा 1 सफेद गेंद

थैला तृतीय –3 सफेद गेंद

थैला i के चुने जाने तथा उसमें से एक गेंद के चयन की प्रायिकता $\frac{i}{6}$ है, $i = 1, 2, 3$. इस बात की प्रायिकता क्या है कि

(i) एक लाल गेंद चुनी जाती है?   (ii) एक सफ़ेद गेंद चुनी जाती है?

42. उपर्युक्त प्रश्न संख्या 41 पर ध्यान दीजिए। यदि एक सफेद गेंद चुनी जाती है, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद

(i) थैला – 2   (ii) थैला – 3 से निकाली गयी है?

43. एक दुकानदार तीन प्रकार के फूलों के बीज A_1, A_2 तथा A_3 बेचता है। बीजों को 4:4:2 के अनुपात में मिलाकर बेचा जाता है। इन तीन प्रकार के बीजों के अंकुरण की दर क्रमशः 45%, 60% तथा 35% है। निम्नलिखित प्रायिकताओं का परिकलन कीजिए:

(i) एक यादृच्छया चुने गऐ बीज के अंकुरित होने की

(ii) बीज के अंकुरित नहीं होने की, दिया हुआ है कि बीज का प्रकार A_3, है।

(iii) बीज का प्रकार A_2 होने की, दिया हुआ है कि यादृच्छया चुना गया बीज अंकुरित नहीं होता है।

44. यह ज्ञात है कि एक पत्र या तो TATA NAGAR से या CALCUTTA से आया है। पत्र के लिफ़ाफ़े पर केवल दो क्रमागत अक्षर TA दिखलाई पड़ते हैं। पत्र के TATA NAGAR से आने की प्रायिकता क्या है?

45. दो थैलों में से एक में 3 काली तथा 4 सफेद गेंदें हैं जबकि दूसरे में 4 काली तथा 3 सफ़ेद गेंद हैं। एक पासा फेंका जाता है। यदि उस पर संख्या 1 या 3 प्रकट होती है, तो पहले थैले से एक गेंद निकालते हैं, परंतु यदि उस पर कोई अन्य संख्या प्रकट होती है, तो दूसरे थैले से एक गेंद निकाली जाती है। एक काले रंग की गेंद के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

46. तीन कलशों में क्रमशः 2 सफ़ेद तथा 3 काली गेंद, 3 सफ़ेद तथा 2 काली गेंद और 4 सफ़ेद तथा 1 काली गेंद है। प्रत्येक कलश के चुने जाने की प्रायिकता समान है। चुने गए कलश से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है और वह सफेद रंग की पाई जाती है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए वह गेंद दूसरे कलश से निकाली गई है।

47. छाती के एक्स–रे की जाँच द्वारा क्षय रोग (T.B.) के पहचान की प्रायिकता 0.99 है, जब कि व्यक्ति वास्तव में क्षय रोग से ग्रसित है। एक स्वस्थ व्यक्ति के क्षय रोग से ग्रसित पाये हो जाने की प्रायिकता 0.001 है। किसी शहर में 1000 लोगों में से 1 में क्षय रोग पाया जाता है। एक व्यक्ति यादृच्छया चुना जाता है और निदान किए जाने पर पता चलता है कि उसे क्षय रोग है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि उसे वास्तव में क्षय रोग है।

48. कोई वस्तु A, B तथा C तीन मशीनों द्वारा निर्मित होती है। किसी विशिष्ट अवधि में निर्मित वस्तुओं की कुल संख्या में से 50% A पर, 30% B पर तथा 20% C पर निर्मित होती हैं। A पर उत्पादित वस्तुओं का 2% तथा B पर उत्पादित वस्तुओं का 2% ख़राब है और उन वस्तुओं का 3% जो C पर उत्पादित होती हैं, ख़राब हैं। सभी वस्तुओं को एक गोदाम में रखते हैं। एक

वस्तु को यादृच्छया निकाला जाता है और वह ख़राब पायी जाती है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि वह वस्तु मशीन A पर निर्मित हुई है?

49. मान लीजिए कि X एक असंतत यादृच्छिक चर है, जिसका प्रायिकता-बंटन निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है।

$$P(X = x) = \begin{cases} k(x+1), x = 1, 2, 3, 4 \text{ के लिए} \\ 2kx, \quad x = 5, 6, 7 \text{ के लिए} \\ 0, \quad \text{अन्य स्थिति में} \end{cases}$$

जहाँ k एक अचर है। निम्नलिखित परिकलित कीजिए।

(i) k का मान (ii) E (X) (iii) X का मानक विचलन

50. किसी असंतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है।

X 1	2	4	2A	3A	5A	
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

निम्नलिखित को परिकलित कीजिए।

(i) A का मान, यदि E(X) = 2.94 (ii) X का प्रसरण

51. किसी यादृच्छिक चर x का प्रायिकता-बंटन नीचे दिया है।

$$P(X = x) = \begin{cases} kx^2, \ x = 1, 2, 3 \text{ के लिए} \\ 2kx, \ x = 4, 5, 6 \text{ के लिए} \\ 0 \quad \text{अन्यथा (अन्य स्थिति में)} \end{cases}$$

जहाँ k एक अचर है। परिकलित कीजिए।

(i) E(X) (ii) E $(3X^2)$ (iii) P(X $\geq$ 4)

52. एक थैले में $(2n + 1)$ सिक्के हैं। यह ज्ञात है कि इन में से n सिक्के अनभिनत (न्याय्य) हैं। थैले से एक सिक्का यादृच्छया निकाला जाता है और उसे उछाला जाता है। यदि उछालने पर 'चित' प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{31}{42}$, है। तो n का मान निर्धारित कीजिए।

53. ताश की एक भली–भाँति फेंटी हुई गड्डी से दो पत्ते उत्तरोत्तर बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते हैं। यादृच्छिक चर X का माध्य तथा मानक प्रसरण ज्ञात कीजिए, जँहा X इक्कों की संख्या हैं।

54. एक पासे को दो बार उछाला जाता है। पासे पर एक सम संख्या का प्राप्त होना एक 'सफलता' गिनी जाती है। सफलताओं की संख्या का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

55. 5 पत्ते 1 से 5, तक संख्यांकित हैं।, एक पत्ते पर एक ही संख्या अंकित हैं। दो पत्ते यादृच्छया बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते हैं। मान लीजिए कि निकाले गए दो पत्तों पर अंकित संख्याओं का योगफल X से निरुपित होता है। X का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 56 से 82 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

56. यदि $P(A) = \frac{4}{5}$, तथा $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$, तो $P(B \mid A)$ का मान

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{17}{20}$

57. यदि $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$ तथा $P(B) = \frac{17}{20}$, तो $P(A \mid B)$ बराबर है।

(A) $\frac{14}{17}$ (B) $\frac{17}{20}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{1}{8}$

58. यदि $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, तो $P(B \mid A) + P(A \mid B)$ के बराबर है।

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{2}$

59. यदि $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, तो $P(A' \mid B').P(B' \mid A')$ बराबर है।

(A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{25}{42}$ (D) 1

60. यदि A तथा B दो घटनाएँ ऐसी हैं, कि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A/B)=\frac{1}{4}$, तो $P(A' \cap B')$ बराबर है।

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{16}$

61. यदि P(A) = 0.4, P(B) = 0.8 तथा P(B | A) = 0.6, तो $P(A \cup B)$ बराबर है।

(A) 0.24 (B) 0.3 (C) 0.48 (D) 0.96

62. यदि A तथा B दो घटनाएँ हैं और A ϕ, B ϕ, तो

(A) P(A | B) = P(A).P(B) (B) $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

(C) P(A | B).P(B | A)=1 (D) P(A | B) = P(A) | P(B)

63. A तथा B घटनाएँ इस प्रकार हैं कि P(A) = 0.4, P(B) = 0.3 और $P(A \cup B) = 0.5$ तो P (B   A) बराबर है।

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{1}{5}$

64. आपको ऐसी दो घटनाएँ A तथा B दी हुई हैं कि $P(B)=\frac{3}{5}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, तो P(A) बराबर है।

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$

65. उपर्युक्त प्रश्न संख्या 64 में, P(B | A) बराबर है।

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$

66. यदि $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(A | B) = \frac{1}{2}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, तो $P(A \cup B) + P(A \cup B)$ बराबर है।

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

67. मान लीजिए कि $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, तो $P(A | B)$ बराबर है।

(A) $\frac{6}{13}$ (B) $\frac{4}{13}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$

68. यदि A तथा B ऐसी घटनाएँ हैं कि $P(A) > 0$ और $P(B) \neq 1$, तो $P(A | B)$ बराबर है:

(A) $1 - P(A | B)$ (B) $1 - P(A | B)$

(C) $\frac{1 - P(A \cup B)}{P(B')}$ (D) $P(A) | P(B)$

69. यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P(A) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = \frac{4}{9}$, तो $P(A \cap B)$ बराबर है:

(A) $\frac{4}{15}$ (B) $\frac{8}{45}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{9}$

70. यदि दो घटनाएँ स्वतंत्र हैं, तो

(A) वे केवल परस्पर अपवर्जीत होंगी

(B) केवल उनकी प्रायिकताओं का योग अनिवार्यतः 1 होगा

(C) (A) तथा (B) दोनों सत्य हैं

(D) उपर्युक्त में से कोई भी सत्य नहीं है।

71. मान लीजिए कि A तथा B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{5}{8}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ तो $P(A | B).P(A | B)$ बराबर है:

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{3}{20}$ (D) $\frac{6}{25}$

72. यदि घटनाएँ A तथा B स्वंतत्र हैं, तो $P(A \cap B)$ बराबर है–

(A) P (A) + P (B) (B) P(A) – P(B)

(C) P (A) . P(B) (D) P(A) | P(B)

73. दो घटनाएँ E तथा F स्वतंत्र हैं। यदि $P(E) = 0.3$, $P(E \cup F) = 0.5$, तो $P(E \mid F) - P(F \mid E)$ बराबर है–

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{3}{35}$ (C) $\frac{1}{70}$ (D) $\frac{1}{7}$

74. एक थैले में 5 लाल तथा 3 नीली गेंद हैं। यदि 3 गेंद यादृच्छया बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती हैं, तो तथ्यत: एक लाल रंग की गेंद के निकालने की प्रायिकता–

(A) $\frac{45}{196}$ (B) $\frac{135}{392}$ (C) $\frac{15}{56}$ (D) $\frac{15}{29}$

75. उपर्युक्त प्रश्न संख्या 74 पर ध्यान दीजिए। तीन गेंदों में से तथ्यत: दो गेंदों के लाल रंग की होने की प्रायिकता, जबकि पहली गेंद लाल रंग की है–

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{15}{28}$ (D) $\frac{5}{28}$

76. तीन व्यक्ति A, B तथा C, A से प्रारम्भ करके, एक लक्ष्य पर बारी – बारी से गोली चलाते हैं। उनके द्वारा लक्ष्य-भेदन की प्रायिकताएँ क्रमश: 0.4, 0.3 तथा 0.2 हैं। दो बार लक्ष्य – भेदन की प्रायिकता है–

(A) 0.024 (B) 0.188 (C) 0.336 (D) 0.452

77. मान लीजिए कि किसी परिवार में प्रत्येक बच्चे का लड़का या लड़की होना सम सम्भाव्य है। तीन बच्चों वाले एक परिवार को यादृच्छया चुना जाता है। सबसे बड़े बच्चे के लड़की होने की यदि यह दिया हुआ है कि परिवार में कम से कम एक लड़की है तो प्रायिकता है–

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{7}$

78. एक पासा फेंका जाता है तथा 52 पत्तों की ताश की किसी गड्डी से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। पासे पर सम संख्या के प्राप्त होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{3}{4}$

79. किसी बॉक्स में 3 नारंगी, 3 हरी तथा 2 नीली गेंद हैं। बॉक्स से तीन गेंद यादृच्छया बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती हैं। दो हरी गेंद तथा एक नीली गेंद के निकालने की प्रायिकता है

(A) $\frac{3}{28}$ (B) $\frac{2}{21}$ (C) $\frac{1}{28}$ (D) $\frac{167}{168}$

80. एक फ्लैश लाइट (कौंध बत्ती) में 8 बैटरी हैं, जिनमें से तीन निस्तेज (dead) हैं। यदि दो बैट्रियों को बिना प्रतिस्थापन के चुनकर जाँचा जाता है तो उन दोनों के निस्तेज होने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{33}{56}$ (B) $\frac{9}{64}$ (C) $\frac{1}{14}$ (D) $\frac{3}{28}$

81. आठ सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। ठीक 3 चित प्राप्त होने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{1}{256}$ (B) $\frac{7}{32}$ (C) $\frac{5}{32}$ (D) $\frac{3}{32}$

82. दो पासे फेंके जाते हैं। यदि यह ज्ञात है कि पासों पर प्राप्त संख्याओं का योगफल 6 से कम था तो उन पर प्राप्त संख्याओं का योग 3 होने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{5}{18}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

83. निम्नलिखित में से कौन सा कथन द्विपद-बंटन के लिए आवश्यक नहीं है?

(A) प्रत्येक परीक्षण के 2 परिणाम होने चाहिए,

(B) परीक्षणों की संख्या निश्चित (अचर) होनी चाहिए,

(C) परिणाम एक दूसरे पर निर्भर होने चाहिए,

(D) सफलता की प्रायिकता सभी परीक्षणों के लिए समान होनी चाहिए।

84. ताश के 52 पत्तों की भली– भाँति फेंटी हुई किसी गड्डी से दो पत्ते प्रतिस्थापन सहित निकाले जाते हैं। दोनों पत्तों के 'रानी' होने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{1}{13}\times\frac{1}{13}$ (B) $\frac{1}{13}+\frac{1}{13}$ (C) $\frac{1}{13}\times\frac{1}{17}$ (D) $\frac{1}{13}\times\frac{4}{51}$

85. किसी सत्य – असत्य प्रकार के प्रश्नों की परीक्षा में 10 उत्तरों में से कम से कम 8 उत्तरों का सही अनुमान लगाने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{7}{64}$ (B) $\frac{7}{128}$ (C) $\frac{45}{1024}$ (D) $\frac{7}{41}$

86. किसी व्यक्ति के तैराक नहीं होने की प्रायिकता 0.3 है। 5 व्यक्तियों में से 4 के तैराक होने की प्रायिकता है,

(A) ${}^5C_4\ (0.7)^4\ (0.3)$ (B) ${}^5C_1\ (0.7)\ (0.3)^4$

(C) ${}^5C_4\ (0.7)\ (0.3)^4$ (D) $(0.7)^4\ (0.3)$

87. किसी असंतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता-बंटन नीचे दिया हुआ है:

X	2	3	4	5
P(X)	$\frac{5}{k}$	$\frac{7}{k}$	$\frac{9}{k}$	$\frac{11}{k}$

k का मान है,

(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 48

88. निम्नलिखित प्रायिकता बंटन के लिए E (X)का मान है,

X	– 4	–3	–2	–1	0
P(X)	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

(A) 0 (B) –1 (C) –2 (D) –1.8

89. निम्नलिखित प्रायिकता-बंटन के लिए $E(X^2)$ का मान

X	1	2	3	4
P (X)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 10

90. मान लीजिए कि एक यादृच्छिक चर X, प्राचल n तथा p, वाले द्विपद-बंटन का पालन करता है, जहाँ $0 < p < 1$, यदि $P(x = r) / P(x = n–r)$ n तथा r, से स्वंतत्र हैं तो p बराबर है,

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{7}$

91. किसी महाविद्यालय में, 30% विद्यार्थी भौतिक विज्ञान में अनुत्तीर्ण होते हैं, 25% गणित में अनुत्तीर्ण होते हैं तथा 10% दोनों विषयों में अनुत्तीर्ण होते हैं। एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना जाता है। इस बात की प्रायिकता कि वह भौतिक विज्ञान में अनुत्तीर्ण है, यदि वह गणित में अनुत्तीर्ण हो चुका है।

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{9}{20}$ (D) $\frac{1}{3}$

92. A तथा B दो विद्यार्थी हैं। उनके द्वारा किसी प्रश्न को सही प्रकार से हल करने की संभावनाएँ क्रमशः $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{4}$ हैं। यदि उनके द्वारा एक ही प्रकार की गलती करने की प्रायिकता $\frac{1}{20}$ है तथा उनके उत्तर समान हैं, तो उनके द्वारा प्राप्त उत्तर के सही होने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{13}{120}$ (D) $\frac{10}{13}$

93. एक बॉक्स में 100 कलम हैं, जिसमें से 10 कलम खराब हैं। इस बात की प्रायिकता क्या है कि बिना प्रतिस्थापित किए एक-एक करके निकाले गए 5 कलमों के किसी नमूने में अधिक से अधिक 1 कलम खराब है,

(A) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (B) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^4$ (C) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\left(\frac{9}{10}\right)^5+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^4$

बताइए कि प्रश्न संख्या 94 से 103 तक प्रत्येक में दिए हुए कथन सत्य हैं या असत्य ?

94. मान लीजिए कि $P(A) > 0$ तथा $P(B) > 0$, तो घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी तथा स्वंतत्र हैं।

95. यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो A तथा B भी स्वतंत्र हैं।

96. यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो वे स्वतंत्र भी होंगी।

97. दो स्वतंत्र घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं।

98. यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो P(A तथा B) = P(A).P(B).

99. किसी प्रायिकता बंटन के माध्य का दूसरा नाम प्रत्याशा है।

100. यदि A तथा B′ स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो $P(A' \cup B) = 1 - P(A)\,P(B')$

101. यदि A तथा B स्वतंत्र हैं, तो

P (A, B में से केवल एक घटित होती है) = $P(A)P(B\ )+P\ B\ \ P\ A$

102. यदि A तथा B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि P(A) > 0 तथा P(A) + P(B) >1, तो

$$P(B\,|\,A) \geq 1-\frac{P(B')}{P(A)}$$

103. यदि A, B तथा C तीन स्वतंत्र घटनाएँ हैं कि $P(A) = P(B) = P(C) = p$, तो P (A, B, C में से कम से कम दो घटित होती हैं) = $3p^2 - 2p^3$

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

104. यदि A तथा B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि $P(A\,|\,B) = p$, $P(A) = p$, $P(B) = \frac{1}{3}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{5}{9}$, तो p = ______

105. यदि A तथा B ऐसे हैं कि $P(A' \cup B') = \frac{2}{3}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{5}{9}$, तो $P(A') + P(B')$ = ______

106. यदि X, प्राचल $n = 5$, p वाले द्विपद बंटन का पालन करता है तथा P (X = 2) = 9, P (X = 3), तो p = ____________

107. मान लीजिए कि X एक ऐसा यादृच्छिक चर है, जो $x_1, x_2, ..., x_n$ मानों को धारण करता है जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$, हैं। तब, Var (X) = _________

108. मान लीजिए कि A तथा B दो घटनाएँ हैं। यदि $P(A\,|\,B) = P(A)$, तो A, B से ________ है।

प्रश्नपत्र का प्रारूप

गणित - कक्षा 12

समय : 3 घंटे
पूर्णांक : 100

प्रश्नपत्र के विभिन्न आयामों पर अंक भारण निम्नलिखित अनुसार है।

(A) विभिन्न उप-विषय/विषय-वस्तु यूनिट पर भारण

क्रम संख्या	उप-विषय	अंक
1.	संबंध एवं फलन	10
2.	बीजगणित	13
3.	कलन	44
4.	सदिश एवं त्रिविमीय-ज्यामिति	17
5.	रैखिक प्रोग्रामन	06
6.	प्रायिकता	10
	कुल योग	**100**

(B) प्रश्नों के विभिन्न प्रकार पर भारण

क्रम संख्या	प्रश्न का प्रकार	प्रत्येक प्रश्न पर अंक	प्रश्नों की संख्या	
1.	बहुविकल्पीय/वस्तुनिष्ठ/ अति लघु उत्तरीय प्रश्न	01	10	10
2.	लघु उत्तरीय प्रश्न	04	12	48
3.	दीर्घ उत्तरीय प्रश्न	06	07	42
		कुल योग	**29**	**100**

(C) चुनाव/विकल्प की योजना

पूरे प्रश्नपत्र में विकल्प का प्रावधान नहीं है। तथापि चार अकों वाले चार प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प का प्रावधान है।

ब्लू प्रिंट

यूनिट/प्रश्न का प्रकार	**बहु विकल्पी/अति लघु उत्तरीय प्रश्न**	**लघु उत्तरीय प्रश्न**	**दीर्घ उत्तरीय**	**योग**
संबंध एवं फलन	-	4 (1)	6 (1)	10 (2)
बीज गणित	3 (3)	4 (1)	6 (1)	13 (5)
कलन	4 (4)	28 (7)	12 (2)	44 (13)
सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति	3 (3)	8 (2)	6 (1)	17 (6)
रैखिक प्रोग्रामन	–	–	6 (1)	6 (1)
प्रायिकता	–	4 (1)	6 (1)	10 (2)
योग	**10 (10)**	**48 (12)**	**42 (7)**	**100(29)**

भाग (खंड) — A

प्रश्न संख्या 1 से 3 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

1. यदि $\begin{matrix} x & y \\ x & y \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$, तो (x, y)

(A) (1, 1) है (B) (1, –1) है (C) (–1, 1) है (D) (–1, –1) है

2. (–2, 4), (2, k) तथा (5, 4) शीर्षों वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई है। k का मान है

(A) 4 (B) – 2 (C) 6 (D) – 6

3. रेखा $y = x + 1$, वक्र $y^2 = 4x$ की स्पर्शी बिंदु है

(A) (1, 2) पर (B) (2, 1) पर (C) (1, – 2) पर (D) (–1, 2) पर

4. एक 2 × 2 आव्यूह की रचना कीजिए, जिसके अवयव a_{ij} निम्नलिखित नियम से प्राप्त होते है,

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\left|-3\hat{i} + j\right|}{2}, \text{ यदि } i \neq j \\ (i + j)^2, \text{ यदि } i = j. \end{cases}$$

5. $\tan^{-1}(e^x)$ का x के सापेक्ष बिंदु $x = 0$ पर अवकलज का मान ज्ञात कीजिए

6. किसी रेखा का कार्तीय समीकरण $\dfrac{x \quad 3}{2} \quad \dfrac{y \quad 2}{5} \quad \dfrac{z \quad 6}{3}$ है। इस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

7. $(\sin^{83} x + x^{123})dx$ का मान निकालिए।

प्रश्न संख्या 8 से 10 तक में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

8. $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\, dx =$ ______

9. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\hat{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$ परस्पर लम्ब हैं, तो $\lambda =$______

10. $\vec{a}=\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ का $\vec{b}=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$ के अनुदिश प्रक्षेप _________ है।

खंड — B

11. सिद्ध कीजिए कि $\cot^{-1}\frac{\sqrt{1\quad\sin x}\quad\sqrt{1\quad\sin x}}{\sqrt{1\quad\sin x}\quad\sqrt{1\quad\sin x}}\quad\frac{x}{2},\qquad 0\quad x\quad\frac{}{2}$

अथवा

समीकरण $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\frac{}{3},\ x>0$ को x के लिए हल कीजिए।

12. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि,

$$\begin{vmatrix} b & c & c & a & a & b \\ q & r & r & p & p & q \\ y & z & z & x & x & y \end{vmatrix}\quad 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

13. $f(x) = |x+1|+|x+2|$ द्वारा प्रदत्त फलन f के $x = -1$ तथा $x = -2$ पर सांतत्य पर परिचर्चा (विचार-विमर्श) कीजिए।

14. यदि $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$ तथा $y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$ है, तो $\theta=\frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

अथवा

यदि $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0,$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{(1+x)^2}$, जहाँ $-1<x<1,\ x\neq y$

15. किसी शंकु का व्यास 10cm तथा गहराई 10cm है। इसमें 4 cubic cm प्रति मिनट की दर से पानी भरा जा रहा है। उस क्षण जब पानी की गहराई 6cm है, पानी का स्तर किस दर से ऊपर उठ रहा है?

अथवा

उन अंतरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ द्वारा प्रदत्त फलन f

(i) वर्धमान है (ii) ह्रासमान है

16. $\frac{3x \quad 2}{(x \quad 3)(x \quad 1)^2}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

$\log(\log x) \quad \frac{1}{\log x)^2} \; dx$ का ज्ञात कीजिए।

17. $_0 \frac{x \sin x}{1 \quad \cos^2 x} dx$ का ज्ञात कीजिए।

18. उन सभी वृत्तों का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु से हो कर जाते हैं और जिनके केंद्र x- अक्ष पर स्थित हैं।

19. अवकल समीकरण $x^2 y\, dx - (x^3 + y^3)\, dy \;= 0$ को हल कीजिए।

20. यदि $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \vec{a} \neq \vec{0}$ तथा $\vec{b} \neq \vec{c}$, तो सिद्ध कीजिए कि किसी अदिश के लिए

$\vec{b} \quad \vec{c} \qquad \vec{a}$

21. रेखाओं $\vec{r} = (\lambda - 1)\hat{i} + (\lambda + 1)\hat{j} - (1 + \lambda)\hat{k}$ तथा $\vec{r} \quad (1 \quad ^{\rightarrow})\hat{i} \quad (2^{\rightarrow} \quad 1)\hat{j} \quad (^{\rightarrow} \quad 2)\hat{k}$ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

22. ताश के 52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता खो जाता है। गड्डी तथा शेष पत्तों में से दो पत्ते खींचे जाते हैं, जो पान के पत्ते निकलते हैं इस बार की प्रयिमकता ज्ञात कीजिए कि खोया हुआ पत्ता पान का है।

खण्ड — C

23. मान लीजिए कि दो आव्यूह A तथा B निम्नलिखित हैं।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

सत्यापित कीजिए कि $AB = BA = 6I$, जहाँ I कोटि 3 का तत्समक आव्यूह है अत: नीचे दिए हुए समीरण निकाय को हल कीजिए।

$x - y = 3,\ 2x + 3y + 4z = 17$ और $y + 2z = 7$

24. समुच्चय $\mathbf{R} - \{-1\}$ में एक द्वि-आधारी संक्रिया निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है, सभी $a, b \in \mathbf{R} - \{-1\}$ के लिए $a * b = a + b + ab$. सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{R} - \{-1\}$ में $*$ क्रमविनिमेय है। संक्रिया $*$ का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि इसके अंतर्गत $\mathbf{R} - \{-1\}$ का प्रत्येक अवयव व्युत्क्रमणीय है।

25. सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त कर्ण वाले किसी समकोण त्रिभुज का परिमाप अधिकतम होता है, जब त्रिभुज समद्विबाहु हो।

26. समाकलन विधि का प्रयोग कर के रेखाओं $2x + y = 4$, $3x - 2y = 6$ तथा $x - 3y + 5 = 0$ के द्वारा घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

अथवा

$\int_{1}^{4} (2x^2 \quad x)dx$ का मान योगफल की सीमा के रुप में निकालिए।

27. बिन्दु $(2, 3, 7)$ से समतल $3x - y - z = 7$ पर लम्बपाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। लंब की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।

अथवा

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें रेखाएँ $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ तथा $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \mu(-\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ अंतर्विष्ट हैं। इस समतल की बिंदु $(1,1,1)$ से दूरी भी ज्ञात कीजिए।

28. ताश के 52 पत्तों की भली-भांति फेंटी हुई एक गड्डी से दो पत्ते उत्तरोत्तर बिना प्रतिस्थापना किए निकाले जाते हैं। बादशाहों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। बंटन का माध्य एंव प्रसरण के भी परिकलन कीजिए।

29. एक आहार विशेषज्ञ दो प्रकार के खाद्य पदार्थों को इस प्रकार मिलाना चाहता है कि मिश्रण में 8 इकाई विटामिन A तथा 10 इकाई विटामिन C की हो। खाद्य I में 2 इकाई/किलो विटामिन A तथा 1 इकाई/किलो विटामिन C है। खाद्य II में 1 इकाई/किलो विटामिन A तथा 2 इकाई/किलो विटामिन C है खाद्य I को खरीदने में 50 रु प्रति किलो तथा खाद्य II को खरीदने में 70 रु प्रतिकिलो खर्च होते हैं। इस समस्या के मिश्रण का न्यूनतम मूल्य ज्ञात करने के लिए, एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रण कीजिए तथा इसे आलेखीय विधि से हल कीजिए।

अंकन योजना

खंड — A

1. (C)

2. (D)

3. (A) **अंक**

4. $\begin{array}{cc} 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 16 \end{array}$

5. $\frac{1}{2}$

6. $\vec{r} \quad (3\hat{i} - 2\hat{j} \quad 6\hat{k}) \qquad (2\hat{i} - 5\hat{j} \quad 3\hat{k})$, जहाँ एक अदिश है।

7. 0

8. $x + c$

9. $\lambda = -2$

10. $\frac{1}{7}$ $1 \times 10 = 10$

खंड — B

11. L.H.S. $= \cot^{-1} \dfrac{\sqrt{1 \quad \sin x} \quad \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 \quad \sin x} \quad \sqrt{1 - \sin x}}$

$$= \cot^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2}} \right\} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$= \cot^{-1} \frac{\left|\cos\frac{x}{2} \quad \sin\frac{x}{2}\right| \left|\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\cos\frac{x}{2} \quad \sin\frac{x}{2}\right| - \left|\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right|} \qquad \left[\text{क्योंकि } 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2}\right]$$

$$= \cot^{-1} \frac{\cos\frac{x}{2} \quad \sin\frac{x}{2} \quad \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} \quad \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} \quad \sin\frac{x}{2}}$$

$$= \cot^{-1} \frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \cot^{-1} \quad \cot\frac{x}{2} \quad \frac{x}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\left[\text{since } 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}\right]$$ 1

अथवा

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\quad}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}2x = \frac{\quad}{3} - \sin^{-1} x$$

$$\Rightarrow 2x = \sin\left(\frac{\quad}{3} - \sin^{-1}x\right)$$ 1

$$= \sin\frac{\quad}{3} \cos(\sin^{-1}x) - \cos\frac{\quad}{3} \sin(\sin^{-1}x) \quad = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 \quad \sin^2(\sin^{-1}x)} \quad \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 \quad x^2} \quad \frac{1}{2}x$$

$$4x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} - x, \; 5x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad 25x^2 = 3(1 - x^2)$$

$$\Rightarrow \quad 28x^2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{3}{28}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$ 1

अत: $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ (क्योंकि दिया हुआ है कि $x > 0$) $\frac{1}{2}$

इस प्रकार $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ प्रदत्त समीकरण का हल है।

12. मान लीजिए कि

$$\begin{vmatrix} b \quad c & c \quad a & a \quad b \\ q \quad r & r \quad p & p \quad q \\ y \quad z & z \quad x & x \quad y \end{vmatrix}$$

$C_1 \qquad C_1 + C_2 + C_3$ के प्रयोग द्वारा

$$\begin{vmatrix} 2(a \quad b \quad c) & c \quad a & a \quad b \\ 2(p \quad q \quad r) & r \quad p & p \quad q \\ 2(x \quad y \quad z) & z \quad x & x \quad y \end{vmatrix}$$ 1

$$2\begin{vmatrix} a \quad b \quad c & c \quad a & a \quad b \\ p \quad q \quad r & r \quad p & p \quad q \\ x \quad y \quad z & z \quad x & x \quad y \end{vmatrix}$$

$C_2 \qquad C_2 - C_1$ तथा $C_3 \qquad C_3 - C_1$ द्वारा

$$\Delta=2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ p+q+r & -q & -r \\ x+y+z & -y & -z \end{vmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

$C_1 \quad C_1+C_2+C_3$ के प्रयोग द्वारा तथा C_2 और C_3 दोनो में (–1) उभयनिष्ठ निकालने पर

$$2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

13. दशा (स्थिति)1: जब $x < -2$

$f(x) = |x+1| + |x+2| = -(x+1) - (x+2) = -2x - 3$

दशा 2: जब $-2 \le x < -1$

$f(x) = -x - 1 + x + 2 = 1$ 1

दशा 3: जब $x \ge -1$

$f(x) = x + 1 + x + 2 = 2x + 3$

इस प्रकार

$$f(x)=\begin{cases} -2x-3 & \text{, जब} \quad x<-2 \\ 1 & \text{, जब} \quad -2\le x<-1 \\ 2x+3 & \text{, जब} \quad x\ge -1 \end{cases}$$

अब, $x = -2$ पर L.H.S, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \quad -2^-} -2x-3 \quad = 4-3 = 1$

अब, $x = -2$ पर R.H.S, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \quad -2} 1 \quad 1$

इसके अतिरिक्त $f(-2) = |-2 + 1| + |-2 + 2| = |-1| + |0| = 1$

अतः, $\lim\limits_{x \ \ -2^-} f \ \ x \ = f(-2) = f(-1) = \lim\limits_{x \ \ -2} f \ \ x$ $\quad 1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ फलन f, $x = -2$ पर संतत है।

पुनः $x = -1$ पर L.H.S, $\lim\limits_{x \ \ -1^-} f \ \ x \ = \lim\limits_{x \ \ -1^-} 1 = 1$

$x = -1$ पर R.H.S, $\lim\limits_{x \ \ -1} f \ \ x$

$$= \lim_{x \ \ -1} \ 2x \ \ 3 \ = 1 \qquad 1\frac{1}{2}$$

साथ ही $f(-1) = |-1 + 1| + |-1 + 2| = 1$

अतः $\lim\limits_{x \ \ -1} f \ \ x \ = \lim\limits_{x \ \ -1^-} \ f \ -1$

$\Rightarrow$ फलन $x = -1$ पर सतंत है।

अतः, प्रदत्त फलन दोनो ही बिंदुओं $x = -1$ तथा $x = -2$ पर संतत है।

14. $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$ तथा $y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$

इसलिए, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\sin 2\theta - \sin\theta} = \frac{-2\sin\frac{3\theta}{2}\sin\left(\frac{-\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{3\theta}{2} \qquad 1\frac{1}{2}$$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \frac{3}{2}\sec^2\frac{3}{2} \quad \frac{d}{dx}$$

$$\frac{3}{2}\sec^2\frac{3}{2}\quad \frac{1}{2\ \sin 2\ -\sin}\quad \frac{3}{4}\sec^2\frac{3}{2}\quad \frac{1}{2\cos\frac{3}{2}\ \sin\frac{}{2}}$$

$$=\frac{3}{8}\sec^3\frac{3\theta}{2}\ \text{cosec}\frac{\theta}{2} \qquad 1\frac{1}{2}$$

इस प्रकार $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{8}\sec^3\frac{3\pi}{4}\ \text{cosec}\frac{\pi}{4} = \frac{-3}{2}$ 1

अथवा

$$x\sqrt{1\quad y}\quad y\sqrt{1\quad x}\quad 0\,,\quad x \neq y$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1\quad y}\quad -y\sqrt{1\quad x}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$x^2(1 + y) = y^2(1 + x)$ 1

$\Rightarrow (x + y)\ (x - y) = -y\ x\ (x - y)$

$\Rightarrow x + y = -x\,y$, अर्थात्, $y = \frac{-x}{1\quad x}$ 2

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\quad -\quad \frac{1\quad x\ .1 - x\ 0\quad 1}{1\quad x^{\ 2}}\quad = \frac{-1}{1\quad x^{\ 2}} \qquad 1$$

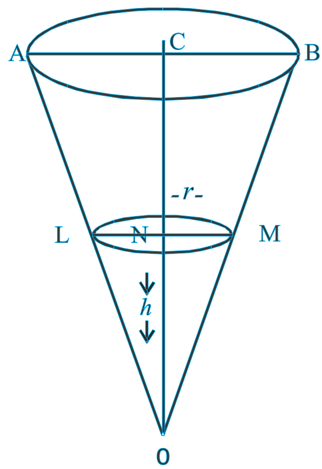
15. मान लीजिए कि OAB एक शंकु है तथा मान लीजिए कि किसी समय t पर पानी का स्तर LM है मान लीजिए कि

ON = h तथा MN = r

दिया हुआ है कि AB = 10 cm, OC = 10 cm तथा

$\dfrac{dV}{dt} = 4 \text{ cm}^3 \text{minute}$, जहाँ V शंकु OLM के आयतन को निरूपित करता है।

नोट कीजिए कि Δ ONM ~ Δ OCB



आकृति 1.1

$\Rightarrow \dfrac{MN}{CB} \quad \dfrac{ON}{OC}$ या $\dfrac{r}{5} \quad \dfrac{h}{10} \Rightarrow r = \dfrac{h}{2}$ 1

अब, $V = \dfrac{1}{3} \quad r^2 h$ .... (i)

(i) मे $r = \dfrac{h}{2}$ रखने पर

$V = \dfrac{1}{12}\pi h^3$ $1\dfrac{1}{2}$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\dfrac{dV}{dt} \quad \dfrac{3\ h^2}{12} \dfrac{dh}{dt}$

$\Rightarrow \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{4}{\pi h^2} \dfrac{dv}{dt}$

इसलिए, जब $h = 6$ cm, $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{4}{9\pi}$ cm/minute $1\dfrac{1}{2}$

अथवा

$f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^4}$

$$= \frac{3\left(x^6-1\right)}{x^4} = \frac{3\left(x^2-1\right)\left(x^4+x^2+1\right)}{x^4} \qquad 1$$

क्योंकि $x^4 + x^2 + 1 > 0$ तथा $x^4 > 0$, इसलिए f के वर्धमान होने के लिए $x^2 - 1 > 0$

$$\Rightarrow x \quad - \quad , -1 \qquad 1, \qquad 1\frac{1}{2}$$

अतः f, $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ में वर्धमान है

(ii) f के ह्रासमान होने के लिए, $f'(x) < 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 1 < 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ [$x \neq 0$ क्योंकि f, $x = 0$ पर परिभाषित नहीं है] $1\frac{1}{2}$

अतः $f(x)$, $(-1, 0) \cup (0, 1)$ में ह्रासमान है।

16. मान लीजिए कि $\dfrac{3x-2}{x \;\; 3 \;\; x \;\; 1^{\,2}} \quad \dfrac{A}{x \;\; 3} \quad \dfrac{B}{x \;\; 1} \quad \dfrac{C}{x \;\; 1^{\,2}}$ 1

तब $3x - 2 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x+3) + C(x+3)$

x^2, x के गुणांकों तथा अचर पदों की तुलना करने पर, निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं,

$A + B = 0$, $2A + 4B + C = 3$ तथा $A + 3B + 3C = -2$

इन समीकरणों को हल करने पर,

$A = \dfrac{-11}{4}$, $B = \dfrac{11}{4}$ तथा $C = \dfrac{-5}{2}$ $1\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{3x-2}{x \;\; 3 \;\; x \;\; 1^{\,2}} \quad \frac{-11}{4\,x \;\; 3} \quad \frac{11}{4\,x \;\; 1} - \frac{5}{2\,x \;\; 1^{\,2}}$$

अत:, $\int \frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2}\,dx = \frac{-11}{4}\int \frac{1}{x+3}\,dx + \frac{11}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

$$\frac{-11}{4}\log|x \quad 3| \quad \frac{11}{4}\log|x \quad 1| \quad \frac{5}{2\;\; x \quad 1} \quad C_1 \qquad 1\frac{1}{2}$$

अथवा

$$\log\ \log x \qquad \frac{1}{\log x^{\ 2}} \quad dx$$

$$= \int \log(\log x)\,dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

log (log*x*) का खंडश: समाकलन करने पर

$$\log\ \log x\ dx \qquad x\log\ \log x - \frac{x}{\log x} \qquad \frac{1}{x}dx$$

$$x\log\ \log x - \frac{1}{\log x}\,dx \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$x\log\ \log x - \frac{x}{\log x} - \quad x \quad \frac{-1}{\log x^{\ 2}} \qquad \frac{1}{x}dx \qquad 1$$

$$x\log\ \log x \qquad \frac{x}{\log x} \qquad \frac{1}{\log x^{\ 2}}dx$$

इसलिए, $\int \left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right) dx = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} + C \qquad 1\frac{1}{2}$

17. मान लीजिए कि $\mathrm{I} = {}_{0}\dfrac{x\sin x}{1 \quad \cos^2 x}dx$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,dx \quad \left[\text{क्योंकि } \int_0^a (x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$

$${}_{0}\frac{\sin x}{1 \quad \cos^2 x}dx-\mathrm{I}$$ 1

$$2\mathrm{I} \qquad {}_{0}\frac{\sin x}{1 \quad \cos^2 x}\,dx$$

$\cos x = t$ रखिए, $x \qquad t \quad -1,\ x \quad 0 \quad t \qquad 1$ तथा $-\ \sin x\,dx \quad dt.$

$$\text{इसलिए } 2\mathrm{I}=\pi\int_1^{-1}\frac{-dt}{1+t^2} \quad = \quad {}_{-1}^{\ 1}\frac{dt}{1 \quad t^2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$=\pi\left[\tan^{-1}t\right]_{-1}^{1}=\pi\left[\tan^{-1}(+1)-\tan^{-1}(-1)\right]$$

$$=+\pi\left[\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi^2}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\mathrm{I}=\frac{\pi^2}{4}$$

18. उस वृत्त का समीकरण, जो मुल बिंदु से हो कर जाए तथा जिसका केन्द्र $x-$अक्ष पर स्थित हो, निम्नलिखित है,

$$(x-a)^2+y^2=a^2 \qquad \text{... (i)}$$ $1\frac{1}{2}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2 \quad x-a \quad 2y\frac{dy}{dx} \quad 0$$

$$x \quad y\frac{dy}{dx} \quad a \qquad\qquad 1\frac{1}{2}$$

a का मान (i) में रखने पर

$$y \quad \frac{dy}{dx} \quad ^2 \quad y^2 \quad x \quad y\frac{dy}{dx} \quad ^2$$

$$x^2 \quad y^2 \quad 2xy\frac{dy}{dx} \quad 0 \qquad\qquad 1$$

19. दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित है,

$$x^2\, y\, dx - \quad x^3 \quad y^3 \quad dy \quad 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \qquad \ldots(1)$$

$y = vx$ रखिए, तो $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ 1

$$v \quad x\frac{dv}{dx} \quad \frac{vx^3}{x^3 \quad v^3\, x^3}$$

$$v \quad x\frac{dv}{dx} \quad \frac{v}{1 \quad v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} \quad \frac{-v^4}{1 \quad v^3}$$

$$\frac{1 \quad v^3}{v^4} dv \quad - \quad \frac{dx}{x}$$ 1

$$\frac{1}{v^4} dv \quad \frac{1}{v} dv \quad - \quad \frac{dx}{x}$$ 1

$$\frac{-1}{3v^3} \quad \log|v| \quad -\log|x| \quad c$$

$\Rightarrow \dfrac{-x^3}{3y^3} + \log|y| = c$, जो अभीष्ट समीकरण है 1

20. दिया हुआ है कि,

$$\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{a} \quad \vec{c}$$

$$\vec{a} \quad \vec{b} - \vec{a} \quad \vec{c} \quad \vec{0}$$

$$\vec{a} \quad \vec{b} - \vec{c} \quad \vec{0}$$ 1

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ या $\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ या $\vec{a} \| \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$ 1

$\Rightarrow \vec{a} \,\|\, \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$ [क्योंकि $\vec{a} \neq \vec{0}$ तथा $\vec{b} \neq \vec{c}$] 1

$\vec{b} - \vec{c} \quad \vec{a}$, किसी अदिश के लिए

$\Rightarrow \vec{b} = \vec{c} + \lambda\vec{a}$ 1

21. हमें ज्ञात है कि रेखाओं $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ तथा $\vec{r} = \vec{c} + \mu\vec{d}$ के बीच की न्यूनतम दूरी निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होती है,

$$D \quad \left| \frac{(\vec{c} - \vec{a}) \quad \vec{b} \quad \vec{d}}{|\vec{b} \quad \vec{d}|} \right|$$ 1

अब दिए हुए समीकरणों को निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है,

$\vec{r} \quad -\hat{i} \quad \hat{j}-\hat{k} \qquad \hat{i} \quad \hat{j}-\hat{k}$ तथा $r \quad \hat{i}-\hat{j} \quad 2\hat{k} \qquad -\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad \hat{k}$

इसलिए, $\vec{c} \quad \vec{a} \quad 2\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 3\hat{k}$ $\frac{1}{2}$

तथा $\vec{b} \quad \vec{d} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 3\vec{i}-0.\vec{j} \quad 3\vec{k}$

$\left|\vec{b} \quad \vec{d}\right| \quad \sqrt{9 \quad 9} \quad \sqrt{18} \quad 3\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$

अत: $D = \left| \dfrac{\vec{c}-\vec{a} \qquad \vec{b} \quad \vec{d}}{\left|\vec{b} \quad \vec{d}\right|} \right| \quad \left| \dfrac{6-0 \quad 9}{3\sqrt{2}} \right| \quad \dfrac{15}{3\sqrt{2}} \quad \dfrac{5}{\sqrt{2}} \quad \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. 2

22. मान लीजिए कि E, E_2, E_3, E_4 तथा A निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित घटनाएँ हैं:

E_1 = खोया हुआ पत्ता पान का है,

E_2 = खोया हुआ पत्ता हुकुम का है,

E_3 = खोया हुआ पत्ता चिड़ी का है,

E_4 = खोया हुआ पत्ता ईंट का है, $\frac{1}{2}$

A = शेष पत्तों में से खीचे गए दो पत्तों का पान का होना

इस प्रकार $P \; E_1 \quad \frac{13}{52} \quad \frac{1}{4}, P \; E_2 \quad \frac{13}{52} \quad \frac{1}{4}, P \; E_3 \quad \frac{13}{52} \quad \frac{1}{4}, P \; E_4 \quad \frac{13}{52} \quad \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

$P(A/E_1)$ = पान के दो पत्तों के खींचे जाने की प्रायिकता, जब कि दिया हुआ है कि पान एक पत्ता खो गया है $= \dfrac{^{12}C_2}{^{51}C_2}$

$P(A/E_2)$ = पान के दो पत्तों के खींचे जाने की प्रायिकता, जब कि दिया हुआ है कि हुकुम का एक पत्ता खो गया है $= \dfrac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$

इसी प्रकार, $P(A/E_3) = \dfrac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$ तथा $P(A/E_4) = \dfrac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$ 1

बेज़-प्रमेय द्वारा,

अभीष्ट प्रायिकता $= P(E_1/A)$

$$= \frac{P\ E_1\ \ P\ A/E_1}{P\ E_1\ \ P\ A/E_1\quad P\ E_2\ \ P\ A/E_2\quad P\ E_3\ \ P\ A/E_3\quad P\ E_4\ \ P\ A/E_4} \qquad 1$$

$$\frac{\frac{1}{4}\ \frac{^{12}C_2}{^{51}C_2}}{\frac{1}{4}\ \frac{^{12}C_2}{^{51}C_2}\quad \frac{1}{4}\ \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}\quad \frac{1}{4}\ \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}\quad \frac{1}{4}\ \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}} \qquad 1$$

$$\frac{^{12}C_2}{^{12}C_2\quad ^{13}C_2\quad ^{13}C_2\quad ^{13}C_2} \quad \frac{66}{66\quad 78\quad 78\quad 78} \quad \frac{11}{50}$$

खंड - C

23. यहाँ

$$AB = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{matrix} \qquad 1$$

$$= \begin{matrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix} \quad 6 \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} = 6I$$

इसी प्रकार $BA = 6I$, अत: $AB = 6I = BA$

क्योंकि $AB = 6I$, $A^{-1} AB \quad 6A^{-1}I$ इससे प्राप्त होता है कि 1

$IB = 6A^{-1}$, अर्थात् , $A^{-1} = \frac{1}{6}B \quad \frac{1}{6} \begin{matrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{matrix}$ $1\frac{1}{2}$

प्रदत्त समीकरण निकाय निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है,

$AX = C$, जहाँ $X \quad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}, \; C \quad \begin{matrix} 3 \\ 17 \\ 7 \end{matrix}$

प्रदत्त निकाय $AX = C$ का हल $X = A^{-1}C$ से प्राप्त होता है $\frac{1}{2}$

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \quad \frac{1}{6} \begin{matrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 17 \\ 7 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{6} \begin{matrix} 6 \quad 34 \quad 28 \\ -12 \quad 34-28 \\ 6-17 \quad 34 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{matrix}$$

अत: $x = 2, y = 1$ and $z = 4$ 2

24. **क्रमविनिमेय :** किसी $a, b \in \mathbf{R} - \{-1\}$ के लिए, ज्ञात है कि $a * b = a + b + ab$ तथा $b * a = b + a + ba$. परन्तु $\mathbf{R} - \{-1\}$ में योग तथा गुणन कि क्रियाएँ क्रमविनिमेय होती हैं। अतः

$$a + b + ab = b + a + ba \;.$$

$$a * b = b * a$$

अतः $\mathbf{R} - \{-1\}$ में * क्रमविनिमेय है। 2

तत्समक अवयव : मान लीजिए कि e तत्समक अवयव है। इसलिए सभी $a \in \mathbf{R} - \{-1\}$ के लिए $a * e = e * a$

$a + e + ae = a$ तथा $e + a + ea = a$

$e\,(1+a) = 0 \qquad e = 0$ [क्योंकि $a \quad -1)$

अतः $\mathbf{R} - \{-1\}$ में परिभाषित * का तत्समक अवयव 0 है। 2

प्रतिलोम : मान लीजिए कि $a \in \mathbf{R} - \{-1\}$ तथा मान लीजिए कि a का प्रतिलोम b है, तो

$$a * b = e = b * a$$

$$a * b = 0 = b * a \quad (\because e = 0)$$

$$a + b + ab = 0$$

$\Rightarrow b = \dfrac{-a}{a+1} \in \mathbf{R}$ (क्योंकि $a \neq -1$) 2

इसके अतिरिक्त, $\dfrac{-a}{a+1} \neq -1$. अतः $b = \dfrac{-a}{a+1} \in \mathbf{R} - \{-1\}$.

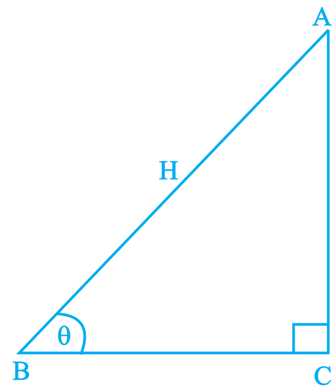
अतः $\mathbf{R} - \{-1\}$ का प्रत्येक अवयव व्युत्क्रमणीय है तथा किसी अवयव a का प्रतिलोम $\dfrac{-a}{a \quad 1}$ है।

25. मान लीजिए कि समकोण त्रिभुज ABC के कर्ण AC की लम्बाई H है तथा कर्ण और आधार BC के बीच का कोण θ है।

इस प्रकार BC = आधार = H cos θ तथा AC = लम्ब = H sin θ

P = समकोण त्रिभुज का परिमाप = H + H cos θ + H sin θ परिमाप के अधिकतम अथवा न्यूनतम होने के लिए

$$\frac{dP}{d\theta}=0$$



आकृति 1.2

H (0 – sin θ + cos θ) = 0, अर्थात्, $\frac{}{4}$ 1

अब, $\frac{d^2P}{d\ ^2}$ H cos H sin $1\frac{1}{2}$

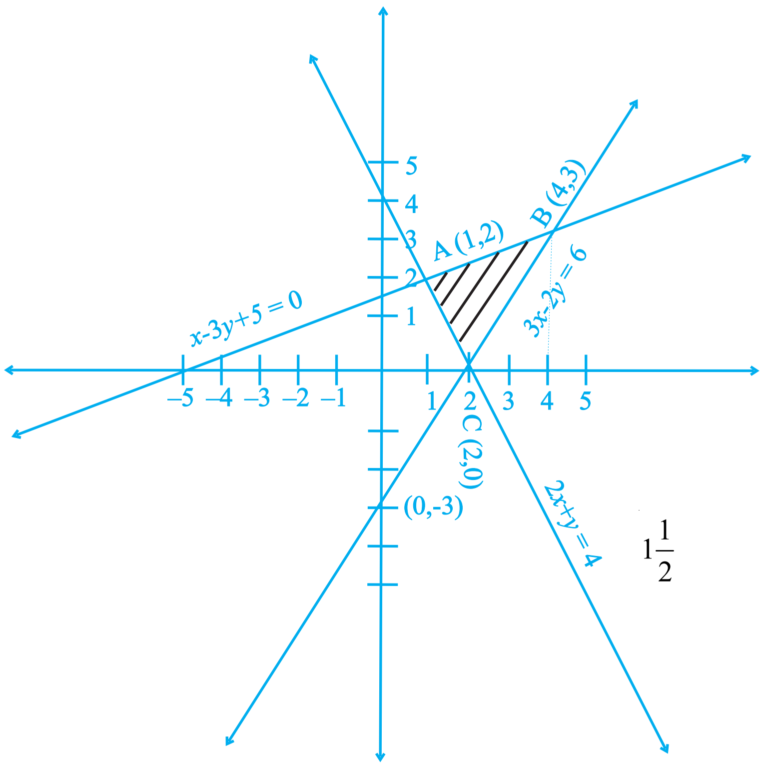
$$\Rightarrow \frac{d^2P}{d\theta^2} \text{ at } \theta=\frac{\pi}{4}=-H\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]=-\sqrt{2}\,H<0$$ 1

अत: $\theta=\frac{\pi}{4}$ पर P अधिकतम है।

$\theta=\frac{\pi}{4}$ के लिए, आधार $= H\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{H}{\sqrt{2}}$ तथा लम्ब $=\frac{H}{\sqrt{2}}$ 1

अत: समकोण त्रिभुज का परिमाप अधिकतम है जब त्रिभुज समद्विबाहु है।

26.



$1\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}$

आकृति 1.3

प्रदत्त रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदुओं को ज्ञात करने पर हमें A(1,2), B(4,3) तथा C (2,0) प्राप्त होता है 1

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल $\int_1^4 \frac{x+5}{3}\, dx - \int_1^2 (4-2x)\, dx - \int_2^4 \frac{3x-6}{2}\, dx$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+5x\right)\Bigg]_1^4 - \left(4x-x^2\right)\Big]_1^2 - \left(\frac{3}{4}x^2-3x\right)\Bigg]_2^4 \qquad 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{16}{2}+20-\left(\frac{1}{2}+5\right)\right]-\left[(8-4)-(4-1)\right]-\left[(12-12)-(3-6)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{45}{2}-1-3=\frac{7}{2}\text{ वर्ग इकाई}$$ 1

अथवा

$$\text{I} = {}_{1}^{4}\; 2x^2 \quad x\ dx \qquad {}_{1}^{4}\; f \quad x\ dx$$

$$\lim_{h \quad 0} \quad f \; 1 \quad f \; 1 \quad h \quad f \; 1 \quad 2h \quad .... \quad f \; 1 \quad n \quad 1 \; h \qquad (i)$$ 1

जहाँ $h=\frac{4-1}{n}$, अर्थात् $,nh=3$

अब, $f \; 1 \quad \overline{n-1}h \quad 2\;1 \quad n-1 \; h^{\,2} - 1 \quad n-1 \; h$

$x-3y+50$
$x \quad -5,\; x \quad 0$

$y \quad 0,\; y \quad \frac{5}{3} \quad 16$

$$2\;1 \quad n-1^{\,2}\, h^2 \quad 2\; n-1\; h \; -1\;(1+(n-1)\,h) \quad 2\; n-1^{\,2}\, h^2 \quad 3\; n-1\, h \quad 1$$

इसलिए, $f \; 1 \quad 2.0^2\, h^2 \quad 3.0.h \quad 1,\; f \; 1 \quad h \quad 2.1^2\, h^2 \quad 3.1.h \quad 1$

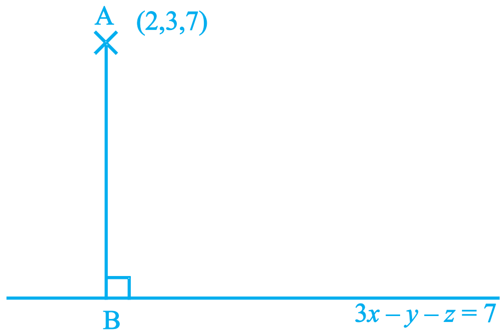
$$f \; 1 \quad 2h \quad 2.2^2\, h^2 \quad 3.2.h \quad 1,... \quad f\big(1+(n-1)h\big)=2.(n-1)^2\, h^2+3.(n-1).h+1$$ $1\frac{1}{2}$

अतः, $\text{I}=\lim\limits_{h\to 0} h\left[n+2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}h^2+\frac{3n(nh-h)}{2}\right]$

$$\lim_{h \quad 0} hn \quad \frac{2\; nh \quad nh-h \quad 2nh-h}{6} \quad \frac{3\; nh \quad nh-h}{2}$$ 2

$$\lim_{h \quad 0} \quad 3 \quad \frac{2\;3 \quad 3-h \quad 6-h}{6} \quad \frac{3\;3\;(3-n)}{2} \quad = \frac{69}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

27.



आकृति 1.4

दिए हुए समतल पर लम्ब रेखा AB का समीकरण

$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-7}{-1}=\lambda$ (मान लिया) है $\qquad 1\frac{1}{2}$

इसलिए बिन्दु A से समतल $3x-y-z=7$ पर खींचे गए लम्ब के पाद B के निर्देशांक निम्नलिखित हैं

$3 \quad 2,- \quad 3, \quad 7$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

क्योंकि B $\; 3 \quad 2,- \quad 3, \quad 7$ समतल $3x-y-z=7$ पर स्थित है, इसलिए

$3\;3 \quad 2 \;-\; - \quad 3 \;-\; - \quad 7 \quad 7 \qquad 1$

अत: $B=(5, 2, 6)$ हैं तथा AB दूरी = लम्ब की लम्बाई $\qquad 2$

$\sqrt{2-5^{\;2} \quad 3-2^{\;2} \quad 7-6^{\;2}} \quad \sqrt{11}$ इकाई है

अत: लंबपाद के निर्देशांक $(5, 2, 6)$ हैं तथा लंब की लम्बाई $=\sqrt{11}$ $\qquad 1$

अथवा

प्रदत्त रेखाएँ निम्नलिखित हैं।

$\vec{r} \quad \hat{i} \quad \hat{j} \qquad \hat{i} \quad 2\hat{j}-\hat{k}$ --------- *(i)*

तथा $\vec{r} \quad \hat{i} \quad \hat{j} \qquad -\hat{i} \quad \hat{j}-2\hat{k}$ ---------*(ii)*

नोट कीजिए कि रेखा *(i)* बिन्दु (1, 1, 0) से हो कर जाती है तथा उसके $\frac{1}{2}$
दिक्-अनुपात 1, 2, –1 हैं तथा रेखा (ii) बिन्दु (1, 1, 0) से हो कर जाती है तथा उसके
दिक्-अनुपात – 1, 1, –2 हैं $\frac{1}{2}$

क्योंकि अभीष्ट समतल में रेखाएँ (i) तथा (ii) अंतर्विष्ट हैं, इसलिए समतल निम्नलिखि सदिशों के समान्तर है,

$\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=-\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

इसलिए अभीष्ट समतल सदिश $\vec{b} \quad \vec{c}$ पर लम्ब है तथा 1

$$\vec{b} \quad \vec{c} \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad -3\hat{i} \quad 3\hat{j} \quad 3\hat{k}$$ 1

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण निम्नलिखित है,

$$\vec{r}-\vec{a} \;.\; \vec{b} \quad \vec{c} \quad 0$$ 1

$$\vec{r}-\hat{i} \quad \hat{j} \;.\; 3\vec{i} \quad 3\vec{j} \quad 3\vec{k} \quad 0$$

$$\vec{r}.\, -\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \quad 0$$

तथा इसका कार्तीय-रूप $-x+y+z=0$ है 2

समतल की बिन्दु (1, 1, 1) से दूरी

$$\frac{|1(-1) \quad 1.1 \quad 1.1|}{\sqrt{1^{2} \quad 1^{2} \quad 1^{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ इकाई है।}$$

28. मान लीजिए कि x, दो पत्तों के निकाले (खींचे) जाने पर, बादशाह की संख्या निरूपित करता है। नोट कीजिए कि x एक यादृच्छिक चर है, जिसका मान 0, 1, 2 हो सकता है। अब

$$P(x=0) = P(\text{एक भी बादशाह नहीं}) = \frac{{}^{48}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{\frac{48!}{2!(48-2)!}}{\frac{52!}{2!(52-2)!}} = \frac{48\times47}{52\times51} \quad \frac{188}{221}$$ 1

$$P\,(x = 1) = P\,(\text{एक बादशाह तथा एक बादशाह से इतर})$$

$$\frac{{}^{4}C_1 \quad 48C_1}{{}^{52}C_2} \quad \frac{4 \quad 48 \quad 2}{52 \quad 51} \quad \frac{32}{221}$$ 1

$$P\,(x = 2) = P\,(\text{दोनो बादशाह}) = \frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{4\times3}{52\times51} = \frac{1}{221}$$ 1

अत: x का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है:

x	0	1	2
P x	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

1

अब x का माध्य $= E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(x_i)$

$$= 0\times\frac{188}{221} + 1\times\frac{32}{221} + \frac{2\times1}{221} = \frac{34}{221}$$

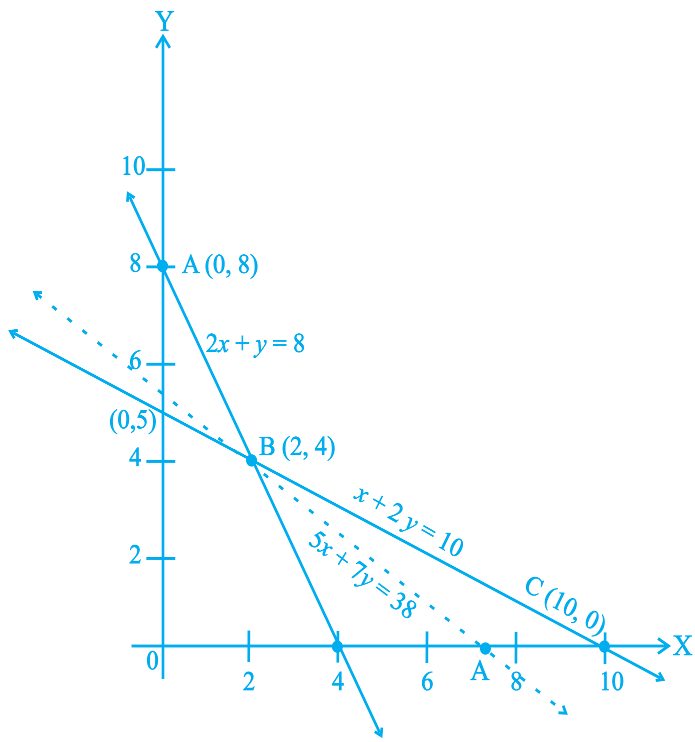
साथ ही $\quad E(x^2) \quad {}^{n}_{i\ 1} \; xi^2 \; p \; xi \quad 0^2 \; \frac{188}{221} \; 1^2 \; \frac{32}{221} \; 2^2 \; \frac{1}{221} \; \frac{36}{221}$

अब $\quad \text{var}(x) = \text{E}(x^2) - [\text{E}(x)^2] \quad \frac{36}{221} - \frac{34}{221}^{\,2} \quad \frac{6800}{221^{\,2}}$ 1

इसलिए मानक विचलन $\sqrt{\text{var}(x)} \quad \frac{\sqrt{6800}}{221} \quad 0.37$ 1

29. मान लीजिए कि मिश्रण में x kg खाद्य I तथा y kg खाद्य II है

अत: हमें व्यवरोधों $2x + y \geq 8$, $x + 2y \geq 10$, $x, y \geq 0$ के अंतर्गत $Z = 50x + 70y$ का न्यूनतमीकरण करना है 2



आकृति 1.5

$2\frac{1}{2}$

उपर्युक्त असमिकाओं द्वारा निर्धारित सुंसगत क्षेत्र एक अपरिबद्ध क्षेत्र है। सुंसगत क्षेत्र शीर्ष (कोनीय बिन्दु) निम्नलिखित हैं:

$$A\ (0, 8)\ B\ (2, 4)\ C(10, 0)$$ $\frac{1}{2}$

अब Z के मान, $A\ (0, 8)$ पर $= 50\times 0+70\times 8=560$

$$B(2, 4) \text{ पर} =380 \quad \text{तथा} \quad C(10, 0) \text{ पर} =500 \text{ हैं।}$$

क्योंकि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है इसलिए हमें $50x + 70y < 380$ अर्थात्, $5x + 7y < 38$ का आलेख खींचना पड़ेगा।

क्योंकि परिणामी खुले अर्धतल तथा सुंसगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है, अत: Z का न्यूनतम मान $=$ B (2, 4) पर 380. अत: मिश्रण का मूल्य न्यूनतम, अर्थात् 380 रूप रखने के लिए, आहार विशेषज्ञ द्वारा इष्टतम मिश्रण योजना (युक्ति) यह होगी कि वह 2 kg खाद्य I तथा 4 kg खाद्य II का मिश्रण बनाए। 1

प्रश्नपत्र का प्रारूप

गणित - कक्षा 12

समय : 3 घंटे
पूर्णांक : 100

प्रश्नपत्र के विभिन्न आयामों पर अंक भारण निम्नलिखित अनुसार है।

(A) विभिन्न उप-विषय/विषय-वस्तु यूनिट पर भारण

क्रम संख्या	उप-विषय	अंक
1.	संबंध एवं फलन	10
2.	बीजगणित	13
3.	कलन	44
4.	सदिश एवं त्रिविमीय-ज्यामिति	17
5.	रैखिक प्रोग्रामन	06
6.	प्रायिकता	10
	कुल योग	**100**

(B) प्रश्नों के विभिन्न प्रकार पर भारण

क्रम संख्या	प्रश्न का प्रकार	प्रत्येक प्रश्न पर अंक	प्रश्नों की कुल संख्या	अंक
1.	बहुविकल्पीय/वस्तुनिष्ठ/ अति लघु उत्तरीय प्रश्न	01	10	10
2.	लघु उत्तरीय प्रश्न	04	12	48
3.	दीर्घ उत्तरीय प्रश्न	06	07	42
		कुल योग	**29**	**100**

(C) चुनाव/विकल्प की योजना

प्रश्नपत्र के विभिन्न भागों में विकल्प का प्रावधान नहीं है। तथापि चार अंकों वाले चार प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प का प्रावधान है।

ब्लू प्रिंट

यूनिट/प्रश्न का प्रकार	बहु विकल्पी/अति लघु उत्तरीय प्रश्न	लघु उत्तरीय प्रश्न	दीर्घ उत्तरीय	योग
संबंध एवं फलन	-	4 (1)	6 (1)	10 (2)
बीज गणित	3 (3)	4 (1)	6 (1)	13 (5)
कलन	4 (4)	28 (7)	12 (2)	44 (13)
सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति	3 (3)	8 (2)	6 (1)	17 (6)
रैखिक प्रोग्रामन	–	–	6 (1)	6 (1)
प्रायिकता	–	4 (1)	6 (1)	10 (2)
योग	**10 (10)**	**48 (12)**	**42 (7)**	**100(29)**

खंड -A

प्रश्न संख्या 1 *से* 3 *तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–*

1. यदि $*$ एक ऐसी द्विआधारी संक्रिया है, जो $*: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, इस प्रकार की है कि $a * b = a + b^2$, तो $-2*5$ का मान है,

(A) –52 (B) 23 (C) 64 (D) 13

2. यदि $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ एक फलन है, तो $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ बराबर है।

(A) $\frac{-\pi}{6}$ (B) $\frac{-\pi}{6}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{7\pi}{6}$

3. दिया हुआ है कि $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ दोनों पक्षों पर प्रारम्भिक पंक्ति रूपान्तरण $R_1 \to R_1 - 2R_2$ का प्रयोग करने पर, हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है

(A) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. यदि A कोटि 3 का एक वर्ग आव्यूह है तथा $|A| = 5$ है, तो $|\text{adj. } A|$ का मान क्या है?

5. यदि A तथा B कोटि 3 के वर्ग आव्यूह, इस प्रकार के हैं कि $|A| = -1$ तथा $|B| = 4$, तो $|3(AB)|$ का मान क्या है?

प्रश्न संख्या 6, 7 *तथा* 8 *में से प्रत्येक में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–*

6. अवकलज समीकरण $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ की घात ________ है।

7. रैखिक अवकल समीकरण $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2$ को हल करने के लिए समाकलन गुणक ________ है।

8. $|\hat{i} - \hat{j}|^2$ का मान ________है।

9. समतल $3x + 4y - 7 = 0$ तथा $6x + 8y + 6 = 0$ के बीच की दूरी क्या है?

10. यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है तथा $(\vec{x} - \vec{a}).(\vec{x} + \vec{a}) = 99$ है, तो $|\vec{x}|$ का मान क्या है?

खंड-B

11. मान लीजिए कि n एक धन पूर्णांक है तथा R एक संबंध **Z** में इस प्रकार परिभाषित है कि $\forall\ a, b \in \mathbf{Z}$, a R b यदि और केवल यदि $a - b$ n से भाज्य है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।

12. सिद्ध कीजिए कि $\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18 = \cot^{-1}3$.

अथवा

समीकरण $\tan^{-1}(2+x) + \tan^{-1}(2-x) = \tan^{-1}\dfrac{2}{3}, -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ को हल कीजिए?

13. x के लिए हल कीजिए, $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ x+6 & x-1 & x+2 \\ x-1 & x+2 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

अथवा

यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ तथा $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)' = B'A'$.

14. k का मान निर्धारित कीजिए जिससे फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k.\cos 2x}{\pi - 4x}, & \text{यदि } x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ 5, & \text{यदि } x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$x = \dfrac{\pi}{4}$ पर संतत हो।

15. यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}$ है, तो दर्शाइए कि $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{d^2x} - x\dfrac{dy}{dx} - a^2y = 0$

16. वक्र $x = \sin 3t, y = \cos 2t$ की, $t = \dfrac{\pi}{4}$ पर, स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

अथवा

उन अंतरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ निरंतर वर्धमान अथवा निरंतर ह्रासमान है।

17. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos^3 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

18. $\int \dfrac{3x+1}{2x^2-2x+3} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

$\int x.(\log x)^2 dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

19. अवकल समीकरण $2y\, e^{\frac{x}{y}}\, dx + (y - 2x e^{\frac{x}{y}})\, dy = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $x = 0$ जब $y = 1$

20. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ है, तो $\vec{b} + \vec{c}$ का $\vec{a}$ के अनुदिश प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

21. बिन्दु $(1, 2, -4)$ से हो कर जाने वाली तथा रेखाओं $\vec{r} = (8\hat{i} - 16\hat{j} + 10\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k})$ और $\vec{r}\ (15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$ पर लंब रेखा का सदिश समीकरण निर्धारित कीजिए।

22. तीन सिक्कों में से एक अनभिनत सिक्का है, जिसे उछालने पर 60% पट आता है, दूसरा भी अनभिनत सिक्का है, जिसे उछालने पर 75% चित आता है तथा तीसरा अनभिनत सिक्का है। तीनों सिक्कों में से एक यादृच्छया चुना जाता है और फिर उछाला जाता है, जिस पर चित आता है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि यह अनभिनत सिक्का होगा?

खंड-C

23. A^{-1} ज्ञात कीजिए जबकि $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ है। अतः निम्नलिखित समीकरण निकाय को

हल कीजिए: $4x + 2y + 3z = 2,\ x + y + z = 1, 3x + y - 2z = 5$

अथवा

प्रारम्भिक रूपांतरणों का प्रयोग करके, A^{-1} ज्ञात कीजिए, जबकि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

24. सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त तिर्यक ऊँचाई वाले अधिकतम आयतन के शंकु का अर्ध शीर्षकोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ है।

25. योगफल की सीमा विधि से $\int_3^3 (3x^2 + 2x + 5)\, dx$ का मान निकालिए।

26. समाकलन का प्रयोग करके, घन x-अक्ष तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के, बिंदु $(1, \sqrt{3})$ पर, अभिलम्ब एवं स्पर्श रेखा द्वारा बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

27. समतलों $x + 3y + 6 = 0$ तथा $3x - y - 4z = 0$ के प्रतिच्छेदन से हो कर जाने वाले और मूल बिंदु से इकाई लंबवत दूरी वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

अथवा

बिंदु $(3, 4, 5)$ से समतल $x + y + z = 2$ की, रेखा $2x = y = z$ के समान्तर नापी गई, दूरी ज्ञात कीजिए।

28. चार खराब बल्ब संयोग से 6 अच्छे बल्बों में मिल गए हैं। यदि किसी बल्ब को केवल देख कर, यह कहना संभव नहीं है कि वह खराब है या नहीं, तो खराब बल्बों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए, यदि इस ढेर में से चार बल्ब यादृच्छया निकाले जाते हैं।

29. एक फ़र्नीचर फ़र्म कुर्सी और मेज़ बनाती है, जिनमें से प्रत्येक के लिए A, B तथा C तीन मशीनों की आवश्यकता पड़ती है। एक कुर्सी को बनाने के लिए मशीन A पर 2 घंटे, मशीन B पर 1 घंटा तथा मशीन C पर एक घंटा काम करने की आवश्यकता है। प्रत्येक मेज़ के लिए A और B मशीनों में से प्रत्येक पर 1 घंटा तथा मशीन C पर 3 घंटे काम करने की आवश्यकता पड़ती है। एक कुर्सी को बेचने पर 30 रु. लाभ प्राप्त होता है, जबकि एक मेज़ पर 60 रु. लाभ प्राप्त होता है। प्रति सप्ताह मशीन A पर कुल 70 घंटे, मशीन B पर कुल 40 घंटे तथा मशीन C पर कुल 90 घंटे काम करने के लिए उपलब्ध हैं। प्रत्येक सप्ताह कितनी कुर्सियाँ तथा मेज़ें बनानी चाहिए, जिससे लाभ का अधिकतमीकरण हो सके? इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रण कीजिए तथा इसे आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए।

अंकन योजना

खंड-A

1. (B)	**2.** (D)	**3.** (B)		
4. 25	**5.** –108	**6.** 2	**7.** $\frac{1}{x}$	**अंक**
8. 2	**9.** 2 इकाई	**10.** 10		$1 \times 10 = 10$

खंड-B

11. (i) क्योंकि $a \, R \, a, \, \forall \, a \in Z$ तथा 0 भाज्य है n से इसलिए R स्वतुल्य है। 1

(ii) $aRb \Rightarrow a - b$ n से भाज्य है, तो $b - a$ भी n से भाज्य है, अतः $b \, R \, a$.
इसलिए R सममित है 1

(iii) मान लीजिए कि $a, b, c, \in \mathbf{Z}$ के लिए $a \, R \, b$ तथा $b \, R \, c$, तो $a - b = n \, p$, $b - c = n \, q$, किसी $p, q \in \mathbf{Z}$ के लिए।

इसलिए $a - c = n \, (p + q)$ और इस प्रकार $a \, R \, c$. 1

अतः R संक्रामक भी है और इसलिए यह एक तुल्यता संबंध है। 1

12. LHS $= \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{18}$ 1

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{8}} + \tan^{-1}\frac{1}{18} = \tan^{-1}\left(\frac{15}{55}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{18}$$ 1

$$= \tan^{-1}\frac{3}{11} + \tan^{-1}\frac{1}{18} = \tan^{-1}\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{18}}{1-\frac{3}{11}\ \frac{1}{18}} = \tan^{-1}\frac{65}{195}$$ 1

$$= \tan^{-1}\frac{1}{3} = \cot^{-1}3 = \text{RHS}$$ 1

अथवा

क्योंकि $\tan^{-1}(2+x) + \tan^{-1}(2-x) = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

इसलिए $\tan^{-1}\frac{(2+x)+(2-x)}{1-(2+x)\ (2-x)} = \tan^{-1}\frac{2}{3}$ $1\frac{1}{2}$

अतः $\frac{4}{x^2-3} = \frac{2}{3}$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ 1

13. दिया हुआ है कि $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ x+6 & x-1 & x+2 \\ x-1 & x+2 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

$R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$, के प्रयोग द्वारा, $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$ $1\frac{1}{2}$

$$\begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix}, \text{ द्वारा } \begin{vmatrix} x+2 & 4 & -3 \\ 4 & -11 & -1 \\ -3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad 1\frac{1}{2}$$

इसलिए $(x + 2)(-111) - 4(37) - 3(-37) = 0$ जिसे हल करने पर $x = -\frac{7}{3}$ 1

अथवा

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 15 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad 1$$

इसलिए, $\quad LHS = (AB)' = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ 1

$RHS = B'A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ इसलिए, LHS = RHS 1+1

14. क्योंकि $x = \frac{\pi}{4}$ पर f संतत है, अतः $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = 5.$ $\frac{1}{2}$

अब $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{k.\cos 2x}{\pi - 4x} = \lim_{y \to 0} \frac{k \cos 2(\frac{\pi}{4} - y)}{\pi - 4(\frac{\pi}{4} - y)}$, where $\frac{\pi}{4} - x = y$, $1\frac{1}{2}$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{k.\cos(\frac{\pi}{2} - 2y)}{\pi - \pi + 4y} = \lim_{y \to 0} \frac{(k \sin 2y)}{2.\,2y} = \frac{k}{2} \qquad 1\frac{1}{2}$$

इसलिए $\frac{k}{2}=5 \quad \Rightarrow k=10.$ $\frac{1}{2}$

15. $y = e^{a\cos^{-1}x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{a\cos^{-1}x}\frac{(-a)}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{1}{2}$

इसलिए $\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = -a\,y.......(1)$ $\frac{1}{2}$

x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर,

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{dy}{dx} = -\frac{ady}{dx}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow (1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\,\frac{dy}{dx} = -a\,\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}$$ $\frac{1}{2}$

$= -a\,(-ay)$ [(1) द्वारा] $\frac{1}{2}$

अतः $(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$ $\frac{1}{2}$

16. $\frac{dx}{dt} = +\,3\cos 3t,\ \frac{dy}{dt} = -\,2\sin 2t$ 1

इसलिए, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sin 2t}{3\cos 3t}$, तथा $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-2\sin\frac{\pi}{2}}{3\cos 3\frac{\pi}{4}} = \frac{-2}{3.(-\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 1

साथ ही $x = \sin 3t = \sin 3\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $y = \cos 2t = \cos\,\frac{\pi}{2} = 0.$

इसलिए स्पर्श बिंदु $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ है 1

अत: स्पर्श रेखा का समीकरण निम्नलिखित है, $y - 0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

अथवा $2\sqrt{2}\,x - 3y - 2 = 0$ 1

अथवा

$$f'(x) = 4\sin^3 x\ \cos x - 4\cos^3 x\ \sin x$$

$$= -4\sin x \cos x\,(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= -\sin 4x\ .$$ 1

इसलिए, $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\pi}{4}$

अब $0 < x < \frac{\pi}{4}$, के लिए $f'(x) < 0$ 1

अत: f अंतराल $(0, \frac{\pi}{4})$ में f निरंतर ह्रासमान है। $1\frac{1}{2}$

इसी प्रकार हम दिखला सकते हैं कि अंतराल $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ में f निरंतर वर्धमान है $\frac{1}{2}$

17. $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos^3 x\, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x\,(1 - \sin^2 x) \cos x\, dx$$ 1

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} t^4 (1 - t^2)\, dt$$, जहाँ $\sin x = t$ 1

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (t^4 - t^6)\, dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$ 1

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{28}\right) = \frac{23}{4480}$$ 1

18. $$\mathrm{I} = \int \frac{3x+1}{2x^2 - 2x + 3}\, dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x-2) + \frac{5}{2}}{2x^2 - 2x + 3}\, dx$$ 1

$$= \frac{3}{4}\int \frac{4x-2}{2x^2 - 2x + 3}\, dx + \frac{5}{4}\int \frac{1}{x^2 - x + \frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\log|2x^2 - 2x + 3| + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{4}\log|2x^2 - 2x + 3| + \frac{5}{4}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\,\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c$$ $1\frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{4}\log|2x^2 - 2x + 3| + \frac{\sqrt{5}}{2}\,\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c$$

अथवा

$$\mathrm{I} = \int x(\log x)^2 . dx = \int (\log x)^2\, x\, dx$$

$$= (\log x)^2 \frac{x^2}{2} - \int 2\log x \frac{1}{x}\frac{x^2}{2} dx$$ 1

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int \log x.\, x \; dx$$ $\frac{1}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \left[\log x. \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}\, dx\right]$$ 1½

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} + c$$ 1

19. प्रदत्त अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2y.e^{\frac{x}{y}}}$$ $\frac{1}{2}$

$\frac{x}{y} = v$ रखिए $\Rightarrow x = vy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$ $\frac{1}{2}$

इसलिए, $v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,ye^v - y}{2ye^v} = \frac{2ve^v - 1}{2e^v}$ $\frac{1}{2}$

या $y\frac{dv}{dy} = \frac{2ve^v - 1}{2e^v} - v$ अत: $2e^v dv = -\frac{dy}{y}$ 1

$$\Rightarrow 2e^v = -\log|y| + c$$ 1

जब $x = 0,\; y = 1$

या $2e^{\frac{x}{y}} = -\log|y| + c \quad \Rightarrow 2 = c$ $\frac{1}{2}$

तो समीकरण का विशिष्ट हल है $2e^{\frac{x}{y}} = -\log|y| + 2$ 1

20. $\vec{b}+\vec{c}=(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})=3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ 1

$\vec{a}=2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$(\vec{b}+\vec{c})$ का $\vec{a}$ के अनुदिश प्रक्षेप $=\dfrac{(\vec{b}+\vec{c}).\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 1

$\dfrac{6-2+1}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{5}{3}$ इकाई 1+1

21. दी हुई रेखाओं पर लम्ब सदिश निम्नलिखित है,

$$(3\hat{i}-16\hat{j}+7\hat{k})\times(3\hat{i}+8\hat{j}-5\hat{k})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -16 & 7\\ 3 & 8 & -5\end{vmatrix}$$

$1\dfrac{1}{2}$

$=24\hat{i}+36\hat{j}+72\hat{k}$ or $12(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ 1

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण निम्नलिखित है,

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ $\dfrac{1}{2}$

22. मान लीजिए कि,

E_1: पहले (अनभिनत) सिक्के का चयन

E_2: दूसरे (अनभिनत) सिक्के का चयन

E_3: तीसरे (अनभिनत) सिक्के का चयन

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \dfrac{1}{3}$ $\dfrac{1}{2}$

मान लीजिए कि A: एक चित आने को निरूपित करता है

इसलिए, $P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{40}{100}$, $P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{75}{100}$, $P\left(\frac{A}{E_3}\right) = \frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$

$$P\left(\frac{E_3}{A}\right) = \frac{P(E_3)P\left(\frac{A}{E_3}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right) + P(E_3)P\left(\frac{A}{E_3}\right)}$$ $\frac{1}{2}$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{40}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{75}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{10}{33}$$ $1\frac{1}{2}$

खंड–C

23. $|A| = 4(-3) - 1(-7) + 3(-1) = -12 + 7 - 3 = -8$ 1

$A_{11} = -3 \quad A_{12} = 7 \quad A_{13} = -1$ $1\frac{1}{2}$

$A_{21} = 5 \quad A_{22} = -17 \quad A_{23} = -1$

$A_{31} = -2 \quad A_{32} = 2 \quad A_{33} = 2$

इसलिए, $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 7 & -17 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$

दिया हुआ समीकरण निम्नलिखित प्रकार से भी लिखा जा सकता है,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A'.X = B \Rightarrow X = (A'^{-1})B$$ 1

$$= (A^{-1})'B$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 5 & -17 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 & +7 & -5 = & -4 \\ 10 & -17 & -5 = & -12 \\ -4 & +2 & +10 = & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

अतः $x = \frac{1}{2}, \; y = \frac{3}{2}, \quad z = -1$ $\frac{1}{2}$

अथवा

Writing $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ $\frac{1}{2}$

$R_2 \to R_2 + R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ 1

$R_2 \to R_2 + 2R_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ 1

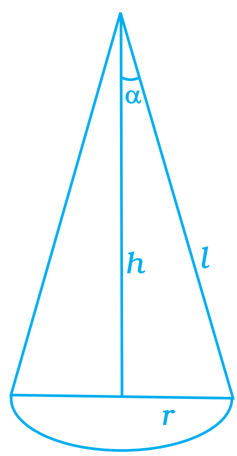
$$R_3 \to R_3 + 2R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A$$

$$R_1 \to R_1 + 2R_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A \qquad 1$$

$$R_1 \to R_1 + 2R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A \qquad 1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad 1\frac{1}{2}$$

24. आयतन $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\qquad \frac{1}{2}$



आकृति 2.1

$l^2 = h^2 + r^2$ $\qquad \frac{1}{2}$

$v = \frac{1}{3}\pi\ (l^2 - h^2)\ h = \frac{1}{3}\pi\ (l^2 h - h^3)$ $\qquad 1$

$\frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{3}(l^2 - 3h^2) = 0$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

$l = \sqrt{3}h,\quad r = \sqrt{2}h$ $\qquad 1$

$\tan\alpha = \dfrac{r}{h} = \sqrt{2}$

$\alpha = \tan^{-1}\sqrt{2}$ $1\frac{1}{2}$

$\dfrac{d^2v}{dh^2} = -2\pi h < 0$

अतः v का मान अधिकतम है। 1

25. $I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx$

$= \lim_{h\to o} h\left[f(1) + f(1+h) + f(1+2h) + \ldots + f(1+(n-1)h)\right]$ ... (i) 1

जहाँ $h = \dfrac{3-1}{n} = \dfrac{2}{n}$

अब,

$f(1) = 3 + 2 + 5 = 10$

$f(1+h) = 3 + 3h^2 + 6h + 2 + 2h + 5 = 10 + 8h + 3h^2$

$f(1+2h) = 3 + 12h^2 + 12h + 2 + 4h + 5 = 10 + 8.2.h + 3.2^2.h^2$ $1\frac{1}{2}$

$f(1+(n-1)h) = 10 + 8(n-1)\,h + 3(n-1)^2.h^2$

$I = \lim_{n\to\infty} h\left[10n + 8h\dfrac{n(n-1)}{2} + 3h^2\,\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$ $1\frac{1}{2}$

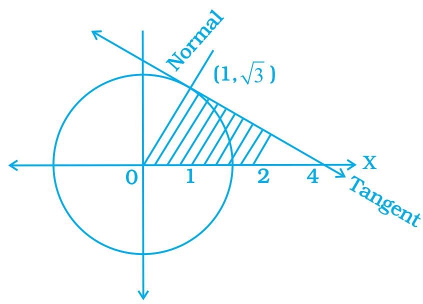
$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{n}\left[10n + \dfrac{16}{n}\dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{12}{n^2}\,\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$ $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n}\left[10n + 8(n-1)\frac{2}{n}(n-1)\,(2n-1)\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2\left[10 + 8\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right]$$ 1

$$= 2\,[10 + 8 + 4] = 44$$ $\frac{1}{2}$

26. बिन्दु $(1, \sqrt{3})$ पर वक्र $x^2 + y^2 = 4$ की स्पर्श रेखा का समीकरण निम्नलिखित है,



आकृति 2.2

$x + \sqrt{3}y = 4$. अतः $y = \dfrac{4 - x}{\sqrt{3}}$ 1

अभिलम्ब का समीकरण $y = \sqrt{3}x$ है। 1

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^1 \sqrt{3}x\,dx + \int_1^4 \dfrac{4 - x}{\sqrt{3}}dx$ 1

$$= \left(\sqrt{3}\,\frac{x^2}{2}\right)_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)_1^4$$ 1

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[8 - \frac{7}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$ वर्ग इकाई 2

27. अभीष्ट समतल का समीकरण

$(x + 3y + 6) + \lambda\,(3x - y - 4z) = 0$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (1 + 3\lambda)\, x + (3 - \lambda)\, y - 4\lambda z + 6 = 0$ $\frac{1}{2}$

मूल बिन्दु से समतल की लम्बवत दूरी $= \dfrac{6}{\sqrt{(1+3\lambda)^2+(3-\lambda)^2+(-4\lambda)^2}}$

इसलिए, $\dfrac{6}{\sqrt{(1+3\lambda)^2+(3-\lambda)^2+(-4\lambda)^2}} = 1$ $1\frac{1}{2}$

या $36 = 1 + 9\lambda^2 + 6\lambda + 9 + \lambda^2 - 6\lambda + 16\lambda^2$

या $26\lambda^2 = 26 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

अभीष्ट समतलों के समीकरण निम्नलिखित हैं,

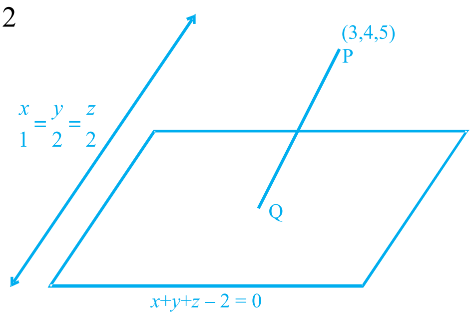
$4x + 2y - 4z + 6 = 0$ तथा $-2x + 4y + 4z + 6 = 0$ $1\frac{1}{2}$

या $2x + y - 2z + 3 = 0$ तथा $x - 2y - 2z - 3 = 0$ 1

अथवा

रेखा का समीकरण $2x = y = z$ i.e. $\dfrac{x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ 1

या $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{2}$ 1



आकृति 2.3

रेखा P Q का समीकरण

$\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-5}{2} = \lambda$ है। 1

$\Rightarrow Q(\lambda+3,\ 2\lambda+4, 2\lambda+5)$ समतल पर स्थित है।

इसलिए $\lambda+3+2\lambda+4+2\lambda+5-2=0$ $1\frac{1}{2}$

या $5\lambda=-10$ या $\lambda=-2$ जिससे Q के निर्देशांक (1, 0, 1) प्राप्त होता है,

अतः $PQ=\sqrt{4+16+16}=6$ इकाई $1\frac{1}{2}$

28. मान लीजिए कि X खराब बल्बों की संख्या को निरूपित करता है।

$$P(X=0) = \frac{{}^6C_4}{{}^{10}C_4} = \frac{6.5.4.3}{10.9.8.7} = \frac{1}{14}$$ 1

$$P(X=1) = \frac{{}^6C_3\,{}^4C_1}{{}^{10}C_4} = \frac{6.5.4.4.}{10.9.8.7}4 = \frac{8}{21}$$ 1

$$P(X=2) = \frac{{}^6C_2\,{}^6C_2}{{}^{10}C_4} = \frac{6.5.4.3}{10.9.8.7}.6 = \frac{3}{7}$$ 1

$$P(X=3) = \frac{{}^6C_1\,{}^6C_3}{{}^{10}C_4} = \frac{6.4.3.2}{10.9.8.7}.4 = \frac{4}{35}$$ 1

$$P(X=4) = \frac{{}^4C_4}{{}^{10}C_4} = \frac{4.3.2.1}{10.9.8.7} = \frac{1}{210}$$ 1

अतः बंटन निम्नलिखित है:

X :	0	1	2	3	4
P(X) :	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

1

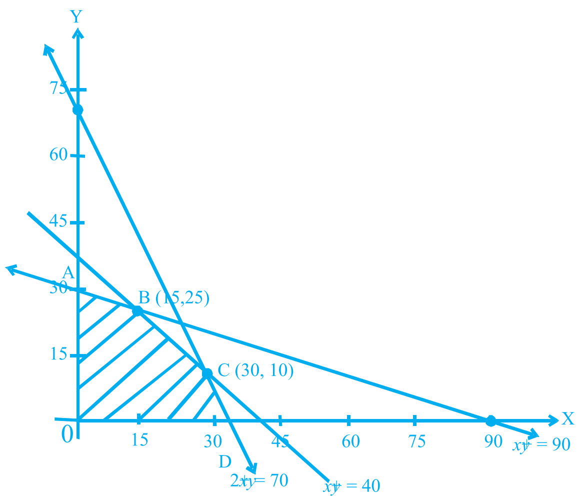
29. मान लीजिए कि प्रति सप्ताह बनाए जाने वाली कुर्सियों की संख्या x तथा मेज़ों की संख्या y है। अत: हमें निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत $P = 30x + 60y$ का अधिकतमीकरण करना है,

$2x + y \leq 70$

$x + y \leq 40$ 2

$x + 3y \leq 90$

$x \geq 0 y \geq 0$



आकृति 2.4

सुसंगत क्षेत्र के शीर्ष निम्नलिखित हैं 2

A (0,30), B (15, 25), C (30,10), D (35, 0) $\frac{1}{2}$

P (A पर) = 30 (60) = 1800

P (B पर) = 30 (15 + 50) = 1950

P (C पर) = 30 (30 + 20) = 1500 $1\frac{1}{2}$

P (D पर) = 30 (35) = 1050

15 कुर्सियों तथा 25 मेजों के लिए P अधिकतम है।

टिप्पणी